

# 干涉式量子定位辅助卫星导航周跳探测与修复方法

杨春燕<sup>1</sup>, 苑博睿<sup>1</sup>, 徐有, 王昕<sup>2</sup>

(1.空军工程大学信息与导航学院,陕西西安,710077;2.61068部队,陕西西安,710061)

**摘要** 快速准确对周跳进行探测与修复是卫星导航高精度定位必须解决的关键问题。干涉式量子定位系统达到高精度必须具有良好 PDOP(位置精度因子),但是受基线布置的影响,在整个覆盖区的 PDOP 并不能保证都是理想的。提出了利用干涉式量子定位某个方向高精度测距信息辅助卫星导航,进行周跳探测与修复方法。推导了干涉式量子定位与卫星导航网络 RTK 两者结合的定位方程,在新的定位模型下,采用 Household 变换以及 LAMBDA 算法,充分利用量子高精度测距所提供的信息,逐历元计算出卫星导航 RTK 测量中双差的整周模糊度,从而根据该模糊度的变化进行周跳的探测与修复。仿真分析表明:该方法可以在单历元内检测到周跳的存在,并在后续的短历元内正确地修复周跳。

**关键词** 干涉式量子定位;周跳探测修复;位置精度因子;网络 RTK;组合定位

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2014.06.005

**中图分类号** TN98 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2014)06-0022-06

## A Method of Cycle Slips Detection and Recovery Aided by Interferometric Quantum Position System in Satellite Navigation

YANG Chun-yan<sup>1</sup>, YUAN Bo-ru<sup>1</sup>, XU You<sup>1</sup>, WANG Xin<sup>2</sup>

(1.Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China;

2.Unit of 61068, Xi'an 710061, China)

**Abstract:** Quick and precise detection and recovery of cycle slips are a key issue to be solved in high precise positioning of satellite navigation. In order to achieve high precision positioning, the interferometric Quantum Positioning System (QPS) must provide a good Position Dilution of Precision (PDOP). The PDOP is not ideal throughout coverage area under the influence of different baseline layouts. A new method of cycle slips detection and recovery is proposed by utilizing the precise quantum ranging of the interferometric Quantum Positioning System to locate at a certain direction in aid of a satellite navigation and cycle slips detection and recovery. The positioning equation of interferometric Quantum Positioning System (QPS) integrated with satellite navigation network RTK is deduced. Under the new positioning model Household transformations and Least-squares Ambiguity Decorrelation Adjustment (LAMBDA) algorithm are adopted to determine the Double Difference Integral Ambiguity (DDIA) of satellite navigation network RTK by means of precise quantum ranging. Cycle slips can be detected and recovered according to variation of

**收稿日期:**2013-12-30

**基金项目:**国家自然科学基金资助项目(61203201)

**作者简介:**杨春燕(1972-),女,山西太谷人,副教授,主要从事卫星导航研究.E-mail: ycy220@163.com

**引用格式:**杨春燕,苑博睿,徐有,等.干涉式量子定位辅助卫星导航周跳探测与修复方法[J].空军工程大学学报:自然科学版,2014,15(6):22-27. YANG Chunyan, YUAN Borui, XU You, et al. A method of cycle slips detection and recovery aided by interferometric quantum position system in satellite navigation[J]. Journal of air force engineering university: natural science edition, 2014, 15(6): 22-27.

DDIA. The simulation results show that the method can determine cycle slips in an epoch and recover the cycle slips correctly within subsequent short epochs.

**Key words:** interferometric Quantum Positioning System; cycle slips detection and correction ; positional dilution of precision; the network RTK; integrated positioning

量子定位系统(QPS)利用量子纠缠与压缩特性克服了经典无线电导航对带宽与功率的限制,可以达到很高的定位精度<sup>[1-4]</sup>。Thomas B Bahder 博士提出了基线干涉式量子定位系统的实现方案<sup>[5]</sup>。但在其应用中得到高的定位精度,要求相对于用户必须具有良好的 PDOP<sup>[6]</sup>,然而受基线布置的影响,在整个覆盖区的 PDOP 并不能保证都是理想的。当用户相对于该干涉基线(指的是张角减小的基线)中连线的某一个方向上的定位精度会明显下降,而与该方向垂直的其他方向的定位精度则下降不明显<sup>[7]</sup>。为了弥补该问题,一种常用的方法就是增加干涉基线个数,但这无疑增加了系统的构建代价。事实上,尽管干涉式量子定位的定位精度在某个方向上会明显下降,但在其他与之垂直的方向仍可以保持很高的定位精度<sup>[8]</sup>。因此,可以利用某个方向高精度测距信息辅助进行周跳探测与修复。

## 1 干涉式量子定位辅助卫星导航的测量模型

### 1.1 干涉式量子定位方程

干涉式量子定位原理是基于波达时间差定位原理实现的。由 6 个位置已知卫星构成 3 条基线,位于基线中点的光子源产生的纠缠光子对分别达到基线的 2 个端点,利用二阶量子相干技术实现测得纠缠光子对到每个卫星的对应基线卫星的光程差的。其定位原理见图 1。

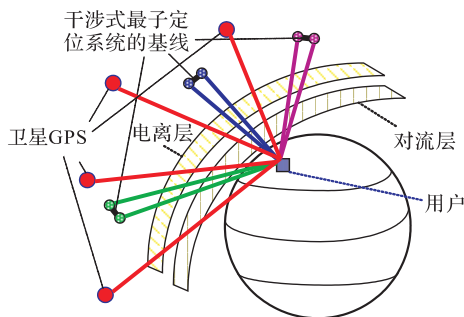


图 1 干涉式量子定位示意图

Fig.1 The interferometric QPS' constellation

测量方程为:

$$\begin{cases} \Delta r_1 = \sqrt{(x-x_{11})^2+(y-y_{11})^2+(z-z_{11})^2} - \\ \sqrt{(x-x_{12})^2+(y-y_{12})^2+(z-z_{12})^2} + \delta_1 \\ \Delta r_2 = \sqrt{(x-x_{21})^2+(y-y_{21})^2+(z-z_{21})^2} - \\ \sqrt{(x-x_{22})^2+(y-y_{22})^2+(z-z_{22})^2} + \delta_2 \\ \Delta r_3 = \sqrt{(x-x_{31})^2+(y-y_{31})^2+(z-z_{31})^2} - \\ \sqrt{(x-x_{32})^2+(y-y_{32})^2+(z-z_{32})^2} + \delta_3 \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\Delta r_1$ ,  $\Delta r_2$  和  $\Delta r_3$  是通过量子干涉测得的用户到基线两个参考点的伪距差;  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  和  $\delta_3$  是第  $i$  条基线的误差;  $\{x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}\}$  和  $\{x_{i2}, y_{i2}, z_{i2}\}$  是第  $i$  ( $i=1,2,3$ ) 条基线两个参考点的 ECEF 的坐标;  $\{x, y, z\}$  是用户的 ECEF 坐标。

因为基线很短,所以基线两点之间电离层以及对流层的误差变化很小,此外,由于采用了具有纠缠压缩特性的量子,波达时间测量精度很高,因此,误差项  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  和  $\delta_3$  很小。

式(1)用一阶泰勒级数在  $\{x_0, y_0, z_0\}$  点展开进行线性化处理并写成矩阵式为:

$$\underline{\Delta R} = \underline{A} \underline{X} + \underline{\delta} \quad (2)$$

式中:

$$\underline{\Delta R} = \begin{bmatrix} \Delta r_1^* \\ \Delta r_2^* \\ \Delta r_3^* \end{bmatrix},$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} x_0 - x_{11} & x_0 - x_{12} & y_0 - y_{11} & y_0 - y_{12} & z_0 - z_{11} & z_0 - z_{12} \\ r_{110} & r_{120} & r_{110} & r_{120} & r_{110} & r_{120} \\ x_0 - x_{21} & x_0 - x_{22} & y_0 - y_{21} & y_0 - y_{22} & z_0 - z_{21} & z_0 - z_{22} \\ r_{210} & r_{220} & r_{210} & r_{220} & r_{210} & r_{220} \\ x_0 - x_{31} & x_0 - x_{32} & y_0 - y_{31} & y_0 - y_{32} & z_0 - z_{31} & z_0 - z_{32} \\ r_{310} & r_{320} & r_{310} & r_{320} & r_{310} & r_{320} \end{bmatrix}$$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}, \underline{\delta} \sim N(0, \sigma^2 \underline{I}_3)$$

如进行多次测量,考虑不同历元的影响,式(2)可以整理为:

$$\underline{\Delta R}_k = \underline{A}_k \underline{X}_k + \underline{\delta}_k \quad (3)$$

式(3)为干涉式定位的数学模型。

利用 8 颗卫星构成的 4 条基线,可以为用户提供四维的空时坐标。

### 1.2 载波相位差分定位方程

在卫星导航定位中,以 GPS 为例,单差的载波

相位以及伪距的观测方程如式(4)式(5)所示:

$$\phi_k^i = \rho_k^i + N^i + \beta_k^{\phi} + \eta_k^i \quad (4)$$

$$\tilde{\rho}_k^i = \rho_k^i + \beta_k^{\rho} + \zeta_k^i \quad (5)$$

式中:上标  $i$  表示第  $i$  颗卫星;下标  $k$  表示第  $k$  个历

元; $\phi_k^i$  和  $\tilde{\rho}_k^i$  分别表示单差伪距和载波相位观测量; $\eta_k^i$  和  $\zeta_k^i$  表示对应的误差项; $\rho_k^i$  是接收机与卫星之间的单差伪距; $\beta_k^{\rho}$  和  $\rho_k^i$  是用户接收机的时钟误差、硬件延迟误差等,不同卫星之间相互独立。

卫星与虚拟参考点之间的真实距离、用户与卫星之间的真实距离可写为:

$$\rho_v^i(k) = \{[x^i(k) - x_v(k)]^2 + [y^i(k) - y_v(k)]^2 + [z^i(k) - z_v(k)]^2\}^{1/2} \quad (6)$$

$$\rho_r^i(k) = \{[x^i(k) - x(k)]^2 + [y^i(k) - y(k)]^2 + [z^i(k) - z(k)]^2\}^{1/2} \quad (7)$$

式中:  $\{x^i(k), y^i(k), z^i(k)\}$  是第  $i$  个卫星的 ECEF 坐标,  $\{x_v(k), y_v(k), z_v(k)\}$  是虚拟参考点的 ECEF 坐标。

首先对  $\rho_v^i(k)$  与  $\rho_r^i(k)$  分别在  $\{x_0(k), y_0(k), z_0(k)\}$  处泰勒级数展开线性化,经运算处理后得到:

$$\begin{aligned} \rho_k^i &= [\Delta\rho_v^i(k) - \Delta\rho_r^i(k)] + \frac{x_0(k) - x^i(k)}{\rho_0^i(k)} [x_r(k) - x_v(k)] + \\ &\frac{y_0(k) - y^i(k)}{\rho_0^i(k)} [y_r(k) - y_v(k)] + \frac{z_0(k) - z^i(k)}{\rho_0^i(k)} [z_r(k) - z_v(k)] \end{aligned} \quad (8)$$

式中  $\rho_0^i(k) =$

$$\sqrt{[x^i(k) - x_0(k)]^2 + [y^i(k) - y_0(k)]^2 + [z^i(k) - z_0(k)]^2}, \quad \Delta\rho_v^i(k)$$

和  $\Delta\rho_r^i(k)$  分别为由观测量  $\tilde{\rho}_v^i(k)$  和  $\tilde{\rho}_r^i(k)$  推导得到的  $\rho_0^i(k)$  与其理论值的差异。

将式(8)代入式(6)和式(7)得:

$$\begin{aligned} \phi_k^i &= [\Delta\rho_v^i(k) - \Delta\rho_r^i(k)] + \frac{x_0(k) - x^i(k)}{\rho_0^i(k)} [x_r(k) - x_v(k)] + \\ &\frac{y_0(k) - y^i(k)}{\rho_0^i(k)} [y_r(k) - y_v(k)] + \frac{z_0(k) - z^i(k)}{\rho_0^i(k)} [z_r(k) - z_v(k)] + N^i + \beta_k^{\phi} + \eta_k^i \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_k^i &= [\Delta\rho_v^i(k) - \Delta\rho_r^i(k)] + \frac{x_0(k) - x^i(k)}{\rho_0^i(k)} [x_r(k) - x_v(k)] + \\ &\frac{y_0(k) - y^i(k)}{\rho_0^i(k)} [y_r(k) - y_v(k)] + \frac{z_0(k) - z^i(k)}{\rho_0^i(k)} [z_r(k) - z_v(k)] + \beta_k^{\rho} + \zeta_k^i \end{aligned} \quad (10)$$

对于  $m$  颗卫星,设第 1 颗卫星为仰角最大的卫星(即参考卫星),其余卫星与第 1 颗卫星的观测值做双差,并考虑多个历元的情况,则式(9)和式(10)可表示成矩阵形式:

$$\Phi_k = \Gamma_k + A_k X_k + N + \beta_k^{\phi} + \eta_k \quad (11)$$

式中:

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \phi_k^1 \\ \phi_k^2 \\ \vdots \\ \phi_k^m \end{bmatrix}, \Gamma_k = \begin{bmatrix} \Delta\rho_v^1(k) - \Delta\rho_r^1(k) \\ \Delta\rho_v^2(k) - \Delta\rho_r^2(k) \\ \vdots \\ \Delta\rho_v^m(k) - \Delta\rho_r^m(k) \end{bmatrix},$$

$$X_k = \begin{bmatrix} x(k) - x_v(k) \\ y(k) - y_v(k) \\ z(k) - z_v(k) \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} N^1 \\ N^2 \\ \vdots \\ N^m \end{bmatrix},$$

$$A_k = \begin{bmatrix} \frac{x_0(k) - x^1(k)}{\rho_0^1(k)} & \frac{y_0(k) - y^1(k)}{\rho_0^1(k)} & \frac{z_0(k) - z^1(k)}{\rho_0^1(k)} \\ \frac{x_0(k) - x^2(k)}{\rho_0^2(k)} & \frac{y_0(k) - y^2(k)}{\rho_0^2(k)} & \frac{z_0(k) - z^2(k)}{\rho_0^2(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x_0(k) - x^m(k)}{\rho_0^m(k)} & \frac{y_0(k) - y^m(k)}{\rho_0^m(k)} & \frac{z_0(k) - z^m(k)}{\rho_0^m(k)} \end{bmatrix},$$

$$\beta_k^{\phi} = \begin{bmatrix} \beta_k^{\phi} \\ \beta_k^{\phi} \\ \vdots \\ \beta_k^{\phi} \end{bmatrix}, \eta_k = \begin{bmatrix} \eta_k^1 \\ \eta_k^2 \\ \vdots \\ \eta_k^m \end{bmatrix}, \eta_k \sim N(\mathbf{0}, \sigma_{\phi}^2 \mathbf{I}_m)$$

$$\rho_k = \Gamma_k + A_k X_k + \beta_k^{\rho} + \zeta_k \quad (12)$$

其中

$$\rho_k = \begin{bmatrix} \rho_k^1 \\ \rho_k^1 \\ \vdots \\ \rho_k^m \end{bmatrix}, \beta_k^{\rho} = \begin{bmatrix} \beta_k^{\rho} \\ \beta_k^{\rho} \\ \vdots \\ \beta_k^{\rho} \end{bmatrix}, \zeta_k = \begin{bmatrix} \zeta_k^1 \\ \zeta_k^2 \\ \vdots \\ \zeta_k^m \end{bmatrix}, \zeta_k \sim N(\mathbf{0}, \sigma_{\rho}^2 \mathbf{I}_m)$$

### 1.3 干涉式定位辅助与载波周跳的探测与修复

单差的误差项是相互独立的,双差的误差项不再是相互独立,若得到用户 ECEF 坐标可靠解,对式(11)、式(12)做 Householder 变换。定义矩阵:

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \sqrt{m} \mathbf{I}_{m-1} - \frac{\mathbf{e} \mathbf{e}^T}{m - \sqrt{m}} \end{bmatrix} = \mathbf{F} \mathbf{J}$$

式中  $\bar{\mathbf{P}}$  为  $m$  阶 Householder 矩阵去掉第一行之后的剩余部分,记  $\mathbf{I}_{m-1}$  为  $m-1$  阶单位矩阵,  $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$ , 则:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \mathbf{I}_{m-1} - \frac{\mathbf{e} \mathbf{e}^T}{m - \sqrt{m}} \text{ 因此 } \begin{cases} \bar{\mathbf{P}} \beta_k^{\phi} = 0 \\ \bar{\mathbf{P}} \beta_k^{\rho} = 0 \end{cases} \\ \mathbf{J} = [-\mathbf{e}, \mathbf{I}_{m-1}] \end{cases} \quad (13)$$

并且:

$$\bar{\mathbf{P}} \mathbf{N} = \mathbf{F} \mathbf{J} \mathbf{N} = \mathbf{F} \mathbf{Z} \quad (14)$$

式中:  $\mathbf{Z} = [N^2 - N^1, N^3 - N^1, \dots, N^m - N^1]^T$  为双差整周模糊度。式(11)和式(12)分别左乘  $\bar{\mathbf{P}}$  得:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} \Phi_k &= \bar{\mathbf{P}} \Gamma_k + \bar{\mathbf{P}} A_k X_k + \mathbf{F} \mathbf{Z} + \bar{\mathbf{P}} \eta_k \\ \bar{\mathbf{P}} \rho_k &\sim N(\mathbf{0}, \sigma_{\phi}^2 \mathbf{I}_{m-1}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\rho}_k = \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\Gamma}_k + \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_k \mathbf{X}_k + \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\zeta}_k \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\zeta}_k \sim N(\mathbf{0}, \sigma_\rho^2 \mathbf{I}_{m-1})$$

式(15)、式(16)中的  $\mathbf{X}_k$  分成 2 部分

$$\mathbf{X}_k = \underline{\mathbf{X}}_k - \bar{\mathbf{X}}_k \quad (17)$$

式中  $\bar{\mathbf{X}}_k = \begin{bmatrix} x_v(k) \\ y_v(k) \\ z_v(k) \end{bmatrix}$  定义了虚拟参考站的 ECEF 坐标矢量。综合式(3)、式(15)、式(16)和式(17),可以得到干涉式量子定位与卫星导航 RTK 定位两种方法组合的方程:

$$\begin{bmatrix} \sigma'' \Delta \underline{\mathbf{R}}_k \\ \text{---} \\ \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\Phi}_k - \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\Gamma}_k + \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{X}}_k \\ \text{---} \\ \sigma' \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\rho}_k - \sigma' \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\Gamma}_k + \sigma' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{X}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'' \underline{\mathbf{A}}_k \\ \text{---} \\ \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_k \\ \text{---} \\ \sigma' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ \text{---} \\ F \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{Z} + \begin{bmatrix} \sigma'' \underline{\boldsymbol{\delta}}_k \\ \text{---} \\ \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\eta}_k \\ \text{---} \\ \sigma' \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\zeta}_k \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中:  $\sigma'' = \sigma_\varphi / \sigma_\rho$ ;  $\sigma' = \sigma_\phi / \sigma_\rho$ 。

$[\sigma'' \underline{\mathbf{A}}_k^T, \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_k^T, \sigma' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_k^T]^T$  的 QR 分解为:

$$\begin{bmatrix} \sigma'' \underline{\mathbf{A}}_k & \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_k & \sigma' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_k \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k$$

式中:  $\mathbf{Q}_k$  是  $(2m+1) \times (2m+1)$  的正交矩阵,

$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k^U \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{R}_k^U$  是  $(2m+1) \times 3$  满秩上三角矩阵。

$$\begin{bmatrix} \sigma'' \Delta \underline{\mathbf{R}}_k \\ \text{---} \\ \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\Phi}_k - \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\Gamma}_k + \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{X}}_k \\ \text{---} \\ \sigma' \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\rho}_k - \sigma' \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\Gamma}_k + \sigma' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{X}}_k \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_k^U \\ \text{---} \\ \boldsymbol{\Psi}_k^L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_k^T \begin{bmatrix} 0 \\ \text{---} \\ F \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k^U \\ \text{---} \\ \mathbf{F}_k^L \end{bmatrix},$$

式中:  $\boldsymbol{\Psi}_k^U$  和  $\boldsymbol{\delta}_k^U$  是  $3 \times 1$  矩阵,  $\mathbf{F}_k^U$  是  $3 \times 3$  矩阵,  $\boldsymbol{\Psi}_k^L$  和  $\boldsymbol{\delta}_k^L$  是  $(2m-2) \times 1$  矩阵,  $\mathbf{F}_k^L$  是  $(2m-2) \times 3$  矩阵。因为  $\mathbf{Q}_k$  是正交矩阵,有:

$$\mathbf{Q}_k^T \begin{bmatrix} \sigma'' \underline{\boldsymbol{\delta}}_k \\ \text{---} \\ \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\eta}_k \\ \text{---} \\ \sigma' \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\zeta}_k \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k^U \\ \text{---} \\ \boldsymbol{\delta}_k^L \end{bmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_\phi^2 \mathbf{I}_{2m+1}) \quad (19)$$

$\mathbf{Q}_k^T$  左乘式(18)得到:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_k^U \\ \text{---} \\ \boldsymbol{\Psi}_k^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k^U \\ \text{---} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{X}}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k^U \\ \text{---} \\ \mathbf{F}_k^L \end{bmatrix} \mathbf{Z} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k^U \\ \text{---} \\ \boldsymbol{\delta}_k^L \end{bmatrix} \quad (20)$$

式(20)的下部分不包含  $\underline{\mathbf{X}}_k$ , 所以未知变量的数目由  $\mathbf{Z}$  决定。

$$\boldsymbol{\Psi}_k^L = \mathbf{F}_k^L \mathbf{Z} + \boldsymbol{\delta}_k^L, \boldsymbol{\delta}_k^L \sim N(\mathbf{0}, \sigma_\phi^2 \mathbf{I}_{2m-2}) \quad (21)$$

如果历元数为  $K$ , 得到:

$$\boldsymbol{\Psi}^L = \mathbf{F}^L \mathbf{Z} + \boldsymbol{\delta}^L, \boldsymbol{\delta}^L \sim N(\mathbf{0}, \sigma_\phi^2 \mathbf{I}_{2mK-2K}) \quad (22)$$

式中:

$$\boldsymbol{\Psi}^L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1^L \\ \boldsymbol{\Psi}_2^L \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Psi}_K^L \end{bmatrix}, \mathbf{F}^L = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^L \\ \mathbf{F}_2^L \\ \vdots \\ \mathbf{F}_K^L \end{bmatrix}, \boldsymbol{\delta}^L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1^L \\ \boldsymbol{\delta}_2^L \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_K^L \end{bmatrix}$$

同时,  $\mathbf{F}^L$  的 QR 分解可写为:

$$\mathbf{F}^L = \mathbf{S}^L \mathbf{T}^L \quad (23)$$

式中:  $\mathbf{S}^L$  是一个  $(2mK-2K) \times (2m-2)$  正交矩阵,

$\mathbf{T}^L = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{LU} \\ \text{---} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$  是  $(2mK-2K) \times (m-1)$  矩阵,

$\mathbf{T}^{LU}$  是一个满秩的上三角阵,它的秩由双差整周模糊度 DDIA 观测的数目决定,例如,它的秩可设为  $m-1$ ,  $\mathbf{S}^L$  的转置矩阵左乘式(22),得到:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{LU} \\ \text{---} \\ \boldsymbol{\Psi}^{LL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{LU} \\ \text{---} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{Z} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}^{LU} \\ \text{---} \\ \boldsymbol{\delta}^{LL} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}^{LU} \\ \text{---} \\ \boldsymbol{\delta}^{LL} \end{bmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_\phi^2 \mathbf{I}_{2mK-2K})$$

仅留下其上半部,得到:

$$\boldsymbol{\Psi}^{LU} = \mathbf{T}^{LU} \mathbf{Z} + \boldsymbol{\delta}^{LU}, \boldsymbol{\delta}^{LU} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_\phi^2 \mathbf{I}_{m-1}) \quad (25)$$

可由式(25)求解出  $\mathbf{Z}$  的浮动解:

$$\min_{\mathbf{Z}} \|\boldsymbol{\Psi}^{LU} - \mathbf{T}^{LU} \mathbf{Z}\|_{Q^{-1}}^2 \quad (26)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{Z} \in \mathbf{Z}^{m-1}$$

式中:  $\|\cdot\|_{Q^{-1}} = (\cdot)^T \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\Psi}^{LU}}^{-1} (\cdot)$ ,  $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\Psi}^{LU}}^{-1}$  是协方差矩阵  $\boldsymbol{\Psi}^{LU}$  的逆矩阵,  $\mathbf{Z} \in \mathbf{Z}^{m-1}$  定义了  $\mathbf{Z}$  的整数解,

而且

$$\mathbf{Q}_{\Psi^{LU}}^{-1} = \sigma_{\phi}^{-2} \mathbf{I}_{m-1} \quad (27)$$

所以,式(26)可等效为:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Z}} \quad & \|\Psi^{LU} - T^{LU}\mathbf{Z}\|_{\mathbf{Q}^{-1}}^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Z} \in \mathbf{Z}^{m-1} \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)可以采用 LAMBDA 或者 Modified LAMBDA 算法求解,得到  $\mathbf{Z}$  的固定解。得到整周模糊度的固定解后,可以求解出用户与基准站之间的基线矢量,与初始基线矢量比较来探测周跳,若观测历元中存在周跳,则将初始基线矢量回代解算出新的整周模糊度替代原先的整周模糊度即可,从而修复周跳,可逐历元探测与修复。干涉式 QPS 辅助周跳的检测的示意图如图 2。

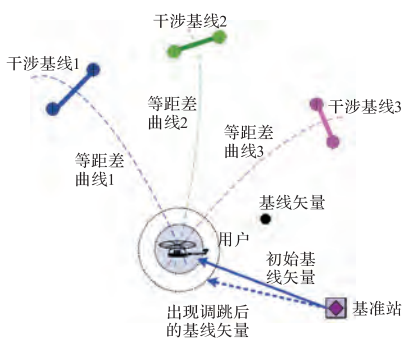


图 2 干涉式 QPS 辅助周跳的检测的示意图

Fig 2 Cycles slips detection methods aided by interferometric quantum position system

同时可以将  $\mathbf{Z}$  的固定解,代入式(20)的上部分,得到历元  $k$  的用户的高精度 ECEF 坐标,即:

$$\Psi_k^U - \mathbf{F}_k^U \mathbf{Z} = \mathbf{R}_k^U \mathbf{X}_k + \delta_k^U \quad (29)$$

式中:  $\mathbf{Z}$  是  $\mathbf{Z}$  的固定解;  $\mathbf{X}_k$  利用  $\mathbf{R}_k^U$  的上三角矩阵很容易求解出来。

## 2 仿真分析

仿真条件:干涉式量子定位系统卫星的轨道高度为 800 km,6 颗卫星两两构成 3 条基线,基线长度为 100 m,为了获得最佳的定位精度,基线与基线两两正交。仿真数据取荷兰 Delft 大学所发布的 RTK 实测数据,历元数为 22,若无周跳,用户的定位误差见图 3。

可以看出,当采用干涉式量子定位与 RTK 结合后,经过 2~3 个历元即可精确确定用户的坐标,同时可以探测与修复周跳,见图 4。图中在历元 16 时出现周跳,采用干涉式量子定位组合后,可以探测到周跳,并经 2~3 个历元修复。

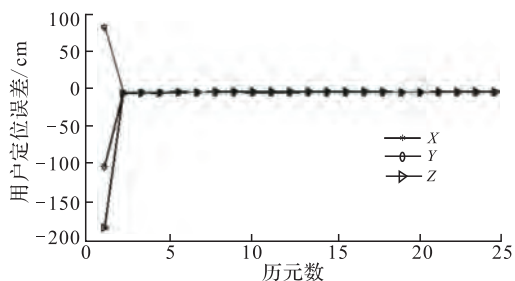


图 3 无周跳时用户的定位误差

Fig 3 User's positioning error without cycle slip

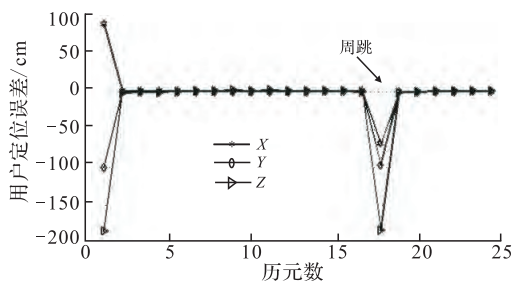


图 4 有周跳时用户的定位误差

Fig 4 User's positioning error with cycle slip

## 3 结语

本文推导了量子定位与卫星导航载波相位差分测量两种方程组合的定位模型,在该模型下,采用 Household 变换以及 LAMBDA 算法,利用量子测距所提供的高精度信息,有效准确求解可整周模糊度的固定解,从而求解出用户与基准站之间的基线矢量,通过与初始基线矢量比较来探测周跳,并在后续的短历元内正确地修复周跳。同时,还能得到用户高精度的位置信息,为 2 种系统的结合提供了新的思路。

### 参考文献(References):

- [1] Raquet J, Lachapelle G. RTK positioning with multiple reference stations[J]. GPS world, 2000, 12(4): 48-53.
- [2] Chang X W, Paige C C, Yin L. Code and carrier phase based short baseline GPS positioning: computational aspects[J]. GPS Solution, 2005, (11): 72-83.
- [3] 岳淼. GPS 载波相位高精度惯性组合导航系统研究硕士论文[D]. 南京:南京航空航天大学, 2007. YUE Miao. Research on high precision integrated GPS/INS navigation system based on carrier phase [D]. Nanjing: Nanjing university of aeronautics and astronautics, 2007. (in Chinese)
- [4] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Quantum enhanced positioning and clock synchronization [J]. Nature, 2001, 412: 417-419

- [5] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Quantum-enhanced measurements: beating the standard quantum limit [J]. *Science*, 2004, (306), 1330-1334.
- [6] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Generating entangled two-photon states with coincident frequencies [J]. *Phys rev lett*, 2002, 88(18): 183602/1-183602/4.
- [7] 杨春燕, 吴德伟, 余永林, 等. 量子多结构分组纠缠到达时间测量增强方法[J]. *北京邮电大学学报: 自然科学版*, 2011, 34(6): 34-38  
 YANG Chunyan, WU Dewei, YU Yonglin, et al. Method of enhancing the measurement of the time of arrival by utilizing multi-structured grouped-entangled quantum pulse[J]. *Journal of Beijing university of posts and telecommunications: natural science edition*, 2011, 34(6): 34-38. (in Chinese)
- [8] Bahder T B. Quantum positioning system[C]//36th Annual precise time and time Interval (PTTI) meeting. Washington, D.C. 7-9 December, 2004.
- [9] 杨春燕, 吴德伟, 卢艳娥, 等. 干涉式量子定位系统最优星座分布研究[J]. *测绘通报*, 2009, 393(12): 1-6.  
 YANG Chunyan, WU Dewei, LU yane, et al. Research on optimal constellation distribution of interferometric quantum positioning system[J]. *Bulletin of surveying and mapping*, 2009, 393(12): 1-6. (in Chinese)
- [10] 杨春燕, 吴德伟, 余永林. 量子测距辅助的网络 RTK 定位算法研究[J]. *中国科学信息科学*, 2010, 40(4): 236-240  
 YANG Chunyan, WU Dewei, YU yonglin. Research on network RTK positioning algorithm aided by quantum ranging[J]. *Science china information sciences*, 2010, 40(4): 236-240 (in Chinese)
- [11] YANG Chunyan, WU Dewei, LU yane et al. The integration of GPS and interferometric quantum position system for high dynamic precise positioning [C]// IEEE international conference on information and automation, 2010, 06.
- [11] Teunissen G P J, Tiberius C C. The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: its performance on short GPS baselines and short observation spans [J]. *Journal of geodesy*, 1997 (71): 589-602.
- [11] Chang X W, Yang X, Zhou T. MLAMBDA: A modified LAMBDA method for integer least-squares estimation [EB/OL]. (2005-06-19) [2010-04-20]. <http://www.cs.mcgill.ca/~chang/pub/MLAMBDA.pdf>.
- [14] 杨春燕. 量子测距辅助卫星导航关键技术研究[D]. 西安: 空军工程大学, 2011.  
 YANG Chunyan. The key technology of satellite navigation aided by the quantum ranging [D]. Xian: air force engineering university, 2011. (in Chinese)
- [15] 李征航. 卫星导航定位新技术及高精度数据处理方法 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2009: 54-69  
 Li zhenghang. new technology and high precision data processing methods of satellite navigation and positioning [M]. Wuhan: Wuhan university press. 2009: 54-69. (in Chinese)
- [16] 张书毕, 朱绍攀, 张秋昭. 一种 GPS 周跳与探测组合算法[J]. *测绘科学技术学报*, 2012, 19(1): 1-4.  
 ZHANG Shunbi, ZHU Shaopan, ZHANG Qiuzhao. A combined algorithm for cycle slips detection and correction [J]. *journal of geometrics science and technology*, 2012: 19(1): 1-4. (in Chinese)

(编辑: 姚树峰)