第 15 卷第 6 期　　空　军　工　程　大　学　学　报(自然科学版)　　Vol.15　No.6
2014 年 12 月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Dec.2014

基于部分可控性矩阵的模型降阶方法及误差分析

高遵海[1,2]，　林　益[2]

(1.武汉轻工大学数学与计算机学院，湖北武汉，430023；
2.宾州州立 SR 大学数学系，Slippery Rock，PA，16057，美国)

摘要　针对单输入单输出系统，利用部分可控性矩阵的 M-P 广义逆作为集结矩阵，提出了一种新的近似集结法模型降阶方法。首先给出了当系统可控与不可控时的 2 种降阶模型，然后通过误差最小分析归结为一种降阶模型，并利用向量到子空间的距离给出了不同阶降阶模型误差的一个简单计算方法。以此误差作为标准，可以方便地选择满足需要的降阶阶数及降阶模型。最后以实例表明了该方法的有效性和应用性。

关键词　模型降阶；集结法；可控性矩阵；最小范数最小二乘解；广义逆

DOI　10.3969/j.issn.1009-3516.2014.06.001

中图分类号　TP301；V249.122　**文献标志码**　A　**文章编号**　1009-3516(2014)06-0001-05

Model Reduction Based on Partial Block Controllability Matrix and Its Error Analysis

GAO Zun-hai[1,2], Jeffrey Lin-Yi Forrest[2]

(1.School of Mathematics and Computer Science, Wuhan Polytechnic University, Wuhan 430023, China;
2.Department of Mathematics, Slippery Rock University, Slippery Rock, PA, 16057, USA.)

Abstract: For the single input and single output linear system, a new method of approximately aggregated model reduction is presented by using the Moore-Penrose generalized inverse of a partial block controllability matrix as an aggregation matrix. Two aggregated order reduction models are presented firstly under the condition that the system is controllable and uncontrollable, and then a unique least error reduced model is integrated no matter whether the system is controllable or not. A simple method is deduced to compute the errors of all order reduced models, which are the distances from some known vectors to some certain subspaces. The errors of all order reduced models can be used as a model reduced order selection criterion and according to this the best order reduced model can be chosen easily. Some examples are shown to verify the validity and feasibility of this method.

Key words: model reduction; aggregation method; controllability matrix; minimum norm least squares; generalized inverse

模型降阶是将一个较大系统转化为一个近似的较小系统的过程，以便降低大型复杂系统的理论分

收稿日期:2014-06-24
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61179032,11301405)
作者简介:高遵海(1966—),男,湖北钟祥人,教授,博士,美国宾州州立 SR 大学数学系访问学者,主要从事控制理论与控制工程、系统理论与工程研究.E-mail:gaozunhai@gmail.com

引用格式:*高遵海,林益. 基于部分可控性矩阵的模型降阶方法及误差分析[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2014,15(6):1-5. GAO Zun-hai, Jeffrey Lin-Yi Forrest. Model reduction based on partial block controllability matrix and its error analysis[J]. Journal of air force engineering university: natural science edition, 2014, 15(6):1-5.*

析难度和减少数据运算量。一般的模型降阶方法应满足的基本条件为:降阶系统与原始系统的近似误差足够小,降阶系统能保持原始系统的某些性能,例如稳定性、无源性和结构性等,降阶计算过程稳定而高效等。比较经典的模型降阶方法主要有:集结法、奇异摄动法、模态近似法、Pade 逼近法等[1-4]。

一般状态空间描述的定常线性系统:

$$\begin{cases}\dot{X}=\boldsymbol{A}X+\boldsymbol{B}u\\ Y=\boldsymbol{C}X,X(t_0)=X_0\end{cases}\tag{1}$$

式中 $X(t)\in R^n$,$u(t),Y(t)\in R$,A ,B ,C 是相应阶数的实矩阵,将系统(1)简单表示为 $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$,令 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{G}X$,其中 $\boldsymbol{G}$ 是 $m\times n$ 矩阵称为集结矩阵。如果对向量 $\boldsymbol{Z}$,存在 $m\times m$ 实矩阵 $\boldsymbol{F}$ 和 $m\times r$ 实矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 使得 $\boldsymbol{FG}=\boldsymbol{GA}$,$\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{GB}$,$\boldsymbol{HG}=\boldsymbol{C}$,那么系统(1)变为

$$\begin{cases}\dot{Z}=\boldsymbol{FZ}+\boldsymbol{\Gamma}u\\ Y_m=\boldsymbol{HZ},\boldsymbol{Z}(t_0)=\boldsymbol{G}X_0\end{cases}\tag{2}$$

系统(2)称为系统(1)的精确集结法降阶模型。它只是一种理想降阶模型,实际上很难得到满足以上条件的集结矩阵。

近年来,Krylov 子空间方法及有关矩阵射影方法被应用于模型降阶[5-9],都是利用传递函数的逼近来降阶模型的频域研究方法。本文利用部分可控性矩阵的 M-P 广义逆作为集结矩阵,得到一种近似集结法模型降阶方法,给出了所有降阶模型误差的一个简单计算方法,以此误差作为标准,可以选择满足需要的降阶阶数及降阶模型,是一种时域研究方法。

本文讨论单输入单输出线性系统,其状态空间方程为:

$$\begin{cases}\dot{X}=\boldsymbol{A}X+\boldsymbol{b}u\\ Y=\boldsymbol{c}X\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$,$X,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in R^n$,$u(t),Y(t)\in R$ 。

1 基于最小范数最小二乘法的集结法模型降阶

对线性系统(3),其可控性矩阵是 $\boldsymbol{Q}_c=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b})$ 。无论其是否可控,对任意正整数 k,$(1<k\leqslant n-1)$,有:

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b}=-\alpha_0\boldsymbol{b}-\alpha_1\boldsymbol{Ab}-\cdots-\alpha_{k-2}\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{b}-\alpha_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b}\tag{4}$$

式(4)不一定总成立,当其不成立时,其中的系数 $(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-2},\alpha_{k-1})$ 有唯一的最小范数最小二乘解,即:

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b}\approx-\alpha_0\boldsymbol{b}-\alpha_1\boldsymbol{Ab}-\cdots-\alpha_{k-2}\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{b}-\alpha_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b}\tag{5}$$

取可控性矩阵的前 k 列作为矩阵

$$\boldsymbol{Q}_k=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b})\tag{6}$$

式(4)可以表示为 $\boldsymbol{Q}_k\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{k-2}\\ \alpha_{k-1}\end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^kb$ 或者 $\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{k-2}\\ \alpha_{k-1}\end{pmatrix}=-\boldsymbol{Q}_k^+\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b}$,其中 $(\cdot)^+$ 表示矩阵的广义 Moore- Penrose 逆。利用式(5),有

$$\boldsymbol{AQ}_k=(\boldsymbol{A}b,\boldsymbol{A}^2b,\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}b,\boldsymbol{A}^kb)\approx(b,\boldsymbol{A}b,\cdots,\boldsymbol{A}^{k-2}b,\boldsymbol{A}^{k-1}b)\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&-\alpha_0\\ 1&0&0&\cdots&0&-\alpha_1\\ 0&1&0&\cdots&0&-\alpha_2\\ \vdots&\vdots&\vdots&&&\\ 0&0&0&\cdots&0&-\alpha_{k-2}\\ 0&0&0&\cdots&1&-\alpha_{k-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{A}_1\tag{7}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&-\alpha_0\\ 1&0&0&\cdots&0&-\alpha_1\\ 0&1&0&\cdots&0&-\alpha_2\\ \vdots&\vdots&\vdots&&&\\ 0&0&0&\cdots&0&-\alpha_{k-2}\\ 0&0&0&\cdots&1&-\alpha_{k-1}\end{pmatrix}\tag{8}$$

是 $k\times k$ 矩阵$(1<k\leqslant n-1)$。

令 $\boldsymbol{b}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{Q}_kX_1=\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{c}_1=\boldsymbol{cQ}_k$,原系统(3)转变为如下降阶模型

$$\begin{cases}\dot{X}_1\approx\boldsymbol{A}_1X_1+\boldsymbol{b}_1u\\ Y_k=\boldsymbol{c}_1X_1\end{cases}\tag{9}$$

这样得到近似的集结法降阶模型(9),集结矩阵是 $\boldsymbol{Q}_k^+$,满足 $\boldsymbol{Q}_k^+\boldsymbol{A}\approx\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Q}_k^+$,$\boldsymbol{Q}_k^+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{Q}_k^+=\boldsymbol{c}$ 。

2 降阶模型的唯一性

对于任意给定的阶数,降阶模型是否唯一取决于矩阵 $\boldsymbol{A}_1$。在第一节中,$\boldsymbol{A}_1$ 有表达式(8),另外根据表达式(7) $\boldsymbol{AQ}_k\approx\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{A}_1$,可以得到 $\boldsymbol{A}_1$ 的最小范数最小二乘解 $\boldsymbol{A}_1\approx\boldsymbol{Q}_k^+\boldsymbol{AQ}_k$,这样 $\boldsymbol{A}_1$ 就有 2 个表达式,它们之间的关系分 2 种情况讨论。

2.1 原系统可控情形

当原系统(3)可控时，矩阵 $\boldsymbol{Q}_k$ 中的列向量 $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b}\}$ 是线性无关的，所以式(4)中的系数 $(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-2},\alpha_{k-1})$ 有唯一的最小二乘解，这样得到 $\boldsymbol{A}_1$ 的表达式(8). 另外矩阵 $\boldsymbol{AQ}_k=(\boldsymbol{Ab},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b})$ 中的列向量也是线性无关的，当它们由向量组 $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b}\}$ 线性表示(或近似线性表示)时表达式也是唯一的，这样矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 是唯一的，并且有 $(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-2},\alpha_{k-1})^{\mathrm{T}}\approx-\boldsymbol{Q}_k^{+}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{Q}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_k)^{-1}\boldsymbol{Q}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b}$ 。

3.2　原系统不可控情形

当原系统(3)不可控时，有 $\mathrm{Rank}\,\boldsymbol{Q}_c<n$. 假设向量 b 关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式是 $\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda^k+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$，那么 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{b}=-a_0\boldsymbol{b}-a_1\boldsymbol{Ab}-\cdots-a_{m-2}\boldsymbol{A}^{m-2}\boldsymbol{b}-a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{b}$ 表明存在正整数 $k=m$ 使得式(4)成立，因为列向量组 $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\cdots,\boldsymbol{A}^{m-2}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{b}\}$ 线性无关，所以(4)式中的系数 $(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-2},\alpha_{m-1})$ 有精确解，即：$(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-2},\alpha_{m-1})^{\mathrm{T}}=(a_0,a_1,\cdots,a_{m-2},a_{m-1})^{\mathrm{T}}=-(\boldsymbol{Q}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_k)^{-1}\boldsymbol{Q}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b}$ 。

这时可以得到精确的集结法降阶模型：

$$\begin{cases}\dot{X}_1=\boldsymbol{A}_1X+\boldsymbol{b}_1u\\ Y_m=\boldsymbol{c}_1X_1\end{cases}\tag{10}$$

如果 $k\leqslant m$，那么和上述系统可控情形一样，矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 是唯一的。

如果 $k>m$，那么列向量组 $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b}\}$ 是线性相关的，矩阵 $\boldsymbol{AQ}_k=(\boldsymbol{Ab},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b})$ 的列向量组也是线性相关的，这样当它们由向量组 $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b}\}$ 来线性表示时表达式不是唯一的。这时 $\boldsymbol{A}_1\approx\boldsymbol{Q}_k^{+}\boldsymbol{AQ}_k$ 和式(8)表示的 $\boldsymbol{A}_1$ 是不同的，即 $\boldsymbol{A}_1$ 是不唯一的。

令 $\widetilde{\boldsymbol{X}}_1=\boldsymbol{Q}_k^{+}\boldsymbol{X}$，$\widetilde{\boldsymbol{A}}_1\approx\boldsymbol{Q}_k^{+}\boldsymbol{AQ}_k$，原系统(3)变为如下降阶模型：

$$\begin{cases}\dot{\widetilde{\boldsymbol{X}}}_1\approx\widetilde{\boldsymbol{A}}_1\widetilde{X}+\widetilde{\boldsymbol{b}}_1u\\ \widetilde{\boldsymbol{Y}}_k=\widetilde{\boldsymbol{c}}_1\widetilde{X}_1\end{cases}\tag{11}$$

这样得到近似的集结法降阶模型，集结矩阵是 $\boldsymbol{Q}_k^{+}$，满足 $\boldsymbol{Q}_k^{+}\boldsymbol{A}\approx\widetilde{\boldsymbol{A}}_1\boldsymbol{Q}_k^{+}$ 。

4　误差分析

原模型与降阶模型之间的误差通常可以理解为对于给定的输入信号而产生的输出之间的误差。但其限值并没有一个统一的标准，另外降阶模型还有稳定性等需要，所以模型降阶可以依据不同的准则。

由于降阶后的传递函数与原系统的传递函数近似相等。误差来源是式(5)产生的误差，接下来分析该误差。

如果原系统(3)是可控的，$\boldsymbol{A}_1$ 是唯一的，得到降阶模型(9). 从表达式(4)和(7)，得到误差 $\|\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b}+(\alpha_0\boldsymbol{b}+\alpha_1\boldsymbol{Ab}+\cdots+\alpha_{k-2}\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{b}+\alpha_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b})\|_2=\|\boldsymbol{AQ}_k-\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{A}_1\|_2$。

如果原系统(3)是不可控的，考虑 2 种情形：

1)当 $k<m$，矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 是唯一的，误差和上面可控时的误差一样；

2)当 $k\geqslant m$，矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 是不唯一的，另一个用矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_1$ 表示，这时的降阶模型有(9)和(12) 2 种，相应的有误差 $\|\boldsymbol{AQ}_k-\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{A}_1\|$ 和 $\|\boldsymbol{AQ}_k-\boldsymbol{Q}_k\widetilde{\boldsymbol{A}}_1\|$ 。

这时组成 Q_k 的列向量组 $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b}\}$ 是线性相关的，表达式(4)中的系数 $(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-2},\alpha_{k-1})$ 有精确的最小二乘解，即向量 $A^k\boldsymbol{b}$ 可由向量组 $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b}\}$ 线性表示并且表示式唯一，这时(4)成立，并且有 $\|\boldsymbol{AQ}_k-\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{A}_1\|=0$，所以 $\|\boldsymbol{AQ}_k-\boldsymbol{Q}_k\widetilde{\boldsymbol{A}}_1\|\geqslant\|\boldsymbol{AQ}_k-\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{A}_1\|$，这就表明降阶模型(9)比降阶模型(11)具有更好的精度或更小的误差，可以直接应用。

从模型降阶的误差分析和实际意义来看，当一个线性系统不可控时，当然应该选择阶数更低的降阶模型，如果误差满足需要的话甚至可以将阶数降到更低。所以这时可以直接利用模型(9)将阶数降到 $k<m$ 。这样误差只需讨论下列情形：

$$\|\boldsymbol{AQ}_k-\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{A}_1\|_2=\|\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b}+(\alpha_0\boldsymbol{b}+\alpha_1\boldsymbol{Ab}+\cdots+\alpha_{k-2}\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{b}+\alpha_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b})\|_2$$

此范数为向量 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b}$ 到子空间 $L(\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b})$ 的距离：

$$d_k=\sqrt{\frac{G(\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b})}{G(\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-2}b,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b})}}=\sqrt{\frac{|\boldsymbol{Q}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{k+1}|}{|\boldsymbol{Q}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_k|}}\tag{12}$$

其中 $G(\cdot)$ 表示 Gram 行列式，即：

$$e_k=\|\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b}+(\alpha_0\boldsymbol{b}+\alpha_1\boldsymbol{Ab}+\cdots+\alpha_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b})\|_2=\|\boldsymbol{AQ}-\boldsymbol{QA}_1\|_2=\sqrt{\frac{|\boldsymbol{Q}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{k+1}|}{|\boldsymbol{Q}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_k|}}=d_k$$

对于任意正整数 k，根据(12)式计算 d_k，将它们从小到大排列，得到相应的降阶为 k 阶模型时的误差排列，从中可以选择满足我们需要的降阶模型阶数。一般说来，降阶模型的阶数越低时误差会越大，但并不意味阶数低的模型误差一定比阶数高

的模型误差大,后面的例子会有说明。

通过以上误差分析,我们可以得到更好的降阶阶数,同时可以得到相应的误差,所以此方法可以提高大系统模型降阶的精度。

4 模型降阶举例

例 1 给定状态空间模型为:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-2&0&0&0\\3&-5&0&0&0\\0&0&0&-2&-2\\0&0&3&-5&-5\\0&0&-7&6&-9\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\5\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=(1\ 1\ 1\ 0\ 0)\quad(13)$$

首先,不考虑系统是否可控,降为 4 阶模型,部分可控性矩阵是:

$$\boldsymbol{Q}_4=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&-12&34&1\\5&-24&49&472\\1&7&-123&116\ 3\end{pmatrix}。$$

令 $\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{b}=-\alpha_0\boldsymbol{b}-\alpha_1\boldsymbol{Ab}-\alpha_2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}-\alpha_3\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b}$,最小范数最小二乘解为:

$(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(-49.145\ 9,\ 53.413\ 6,\ 59.355\ 1,\ 13.453\ 9)$ 。

按照模型(9),4 阶降阶模型是:

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&0&49.145\ 9\\1&0&0&-53.413\ 6\\0&1&0&-59.355\ 1\\0&0&1&-13.453\ 9\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{c}_1=(2\ -12\ 34\ 148)\quad(14)$$

由于 $\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{b}+\alpha_0\boldsymbol{b}+\alpha_1\boldsymbol{Ab}+\alpha_2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}+\alpha_3\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b}=0$,所以模型误差为

$\| A^4\boldsymbol{b}+\alpha_0\boldsymbol{b}+\alpha_1A\boldsymbol{b}+\alpha_2A^2\boldsymbol{b}+\alpha_3A^3\boldsymbol{b}\|_2=\|A\boldsymbol{Q}_4-\boldsymbol{Q}_4A_1\|_2=0$。

如果按照模型(11),4 阶降阶模型是

$$\tilde{A}_1=Q_4^+AQ_4=\begin{pmatrix}-0.471\ 6&-0.098\ 5&-0.007\ 0&49.145\ 9\\0.648\ 9&-0.073\ 4&-0.005\ 2&-53.413\ 6\\-0.073\ 4&0.984\ 7&-0.001\ 1&-59.355\ 1\\-0.005\ 2&-0.001\ 1&0.999\ 9&-13.453\ 9\end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_1=Q_4^+b=\begin{pmatrix}0.366\ 5\\-0.471\ 6\\-0.098\ 5\\-0.007\ 0\end{pmatrix},\tilde{c}_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2\\-12\\34\\148\end{pmatrix}\quad(15)$$

由于模型(14)是精确降阶模型,所以比模型(15)更好。

然后降阶为 3 阶模型,由于等式 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b}=-\alpha_0\boldsymbol{b}-\alpha_1A\boldsymbol{b}-\alpha_2A^2\boldsymbol{b}$ 绝对成立,它的系数解是 $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)=(90,\ 67,\ 14)$,表明原系统(13)是不可控的,并且 Rank $\boldsymbol{Q}_c=3<5$。

利用式(10),精确的 3 阶降阶模型为:

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&-90\\1&0&-67\\0&1&-14\end{pmatrix},b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},c_1=(2\ -12\ 34).$$

最后降阶为 2 阶模型,令 $\boldsymbol{A}^2b=-\alpha_0b-\alpha_1\boldsymbol{A}b$,最小二乘解是 $(\alpha_1,\alpha_2)=(43.909\ 6,\ 11.002\ 1)$,按照(9),降阶模型是:

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0&-43.909\ 6\\1&-11.002\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{c}_1=(2\ -12)$$

最小二乘解的误差是 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}+\alpha_0\boldsymbol{b}+\alpha_1\boldsymbol{Ab}=(0,\ 0,\ -10.206\ 0,\ 4.497\ 6,\ -2.075\ 7)^{\mathrm{T}}$,所以模型误差是 $\|\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}+\alpha_0\boldsymbol{b}+\alpha_1\boldsymbol{Ab}\|_2=11.344\ 6=\|\boldsymbol{AQ}_2-\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{A}_1\|_2$。

另外,根据(12)直接计算距离(误差),得到:

$d_2=11.344\ 6,\ d_3=d_4=0$

所以,3 阶降阶模型是所有降阶模型中最好的模型。

例 2 给定状态空间模型

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&3&0&0&0\\-2&-5&0&0&0\\0&0&0&3&-7\\0&0&-2&-5&6\\0&0&-2&-5&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=(1\ 0\ 2\ 1\ 5)\quad(16)$$

首先计算系统的可控性矩阵:

$$\boldsymbol{Q}_c=\boldsymbol{Q}_5=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ab},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}0&3&-15&57&-195\\1&-5&19&-65&211\\0&3&20&-201&540\\1&-5&-11&159&-447\\0&-5&24&-9&-384\end{pmatrix},$$

$\mathrm{Rank}(\boldsymbol{Q}_c)=\mathrm{Rank}(\boldsymbol{Q}_5)=5$

表明系统(16)是可控的,按照(12)计算所有误差 $d_k,(k=2,3,4)$,得到:

$d_4=1.586\ 8,\ d_3=45.071\ 6,\ d_2=37.344\ 4$

即相应阶数的降阶模型的误差,然后根据(9)得到相应的降阶模型。

4 阶降阶模型是:

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{Q}_4^+\boldsymbol{AQ}_4=\begin{pmatrix}0&0&0&-114.596\ 3\\1&0&0&-116.582\ 4\\0&1&0&-43.576\ 6\\0&0&1&-8.766\ 2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{c}_1=(1\ -21\ 134\ -231)$$

3 阶降阶模型是:

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{Q}_3^{+}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & -53.3093\\ 1 & 0 & -25.4518\\ 0 & 1 & -6.7374\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}_1=(1\ -21\ 134)$$

2 阶降阶模型是:

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{Q}_2^{+}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}0 & -8.2093\\ 1 & -2.4419\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}_1=(1\ -21)。$$

通过以上结果可知,4 阶降阶模型是误差最小的降阶模型。

5 结论

本文提出了一种新的近似集结法模型降阶方法,利用部分可控性矩阵的 Moore-Penrose 广义逆作为集结矩阵,得到 2 种降阶模型:基于最小范数最小二乘法和基于集结矩阵的广义逆。对于系统是否可控,分别讨论了降阶模型的误差,最后得到一种降阶模型即由最小范数最小二乘法确定的降阶模型。本文给出了不同阶数降阶模型误差的一个简单计算方法,即将某向量到某子空间的距离误差作为标准,可以选择满足需要的降阶阶数及降阶模型。

参考文献(References):

[1] Wilhelmus H A, Schilders Henk A. Van der Vorst, et al. Model order reduction: theory, research aspects and applications [M].Berlin:Springer, 2008.

[2] ZuQing Qu. Model order reduction techniques with applications in finite element analysis [M]. Berlin: Springer, 2004.

[3] Peter Benner, Volker Mehrmann, Sorensen Danny C. Dimension reduction of large-scale systems[M].Berlin: Springer, 2005.

[4] Antoulas A C, Sorensen D C, Gugercin S. A survey of model reduction methods for large scale systems [J]. Contemporary mathematics, 2001, 280: 193-219.

[5] Gugercin S. Projection methods for model reduction of large-scale dynamical systems [D]. Rice:Rice university, 2002.

[6] Freund R W. Model reduction methods based on Krylov subspaces [J]. Acta numerica, 2003,12: 267 - 319.

[7] Serkan Gugercin, An iterative SVD-Krylov based method for model reduction of large-scale dynamical systems linear, algebra and its applications [J]. 2008, 428 (8-9):1964-1986.

[8] Grimme E J. Krylov projection methods for model reduction[D]. Illinois :University of Illinois,1997.

[9] Zhaojun Bai. Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale systems [J]. Applied numerical mathematics, 2002, 43(1-2): 9-44.

(编辑:徐敏)