

# 基于极大后验估计的 STUKF 算法跟踪再入弹道目标

张纳温, 汪云, 刘昌云, 李树彬, 张春梅

(空军工程大学防空反导学院, 陕西西安, 710051)

**摘要** 针对弹道导弹再入阶段飞行受力情况复杂多变, 状态噪声未知时变的非线性跟踪问题, 提出基于极大后验估计的 STUKF 非线性滤波跟踪算法。该算法采用最小偏度单行采样策略, 在保证跟踪精度的同时, 提高实时性; 引入带有多重次优渐消因子的强跟踪算法, 在线调整状态一步预测均方误差阵, 提高系统对突发机动跟踪的稳定性; 采用指数加权的方法, 利用次优无偏 MAP 时变噪声统计估计器, 在线估计未知系统过程噪声的统计特性, 提高系统应对噪声变化的能力。仿真结果表明: 该算法具有比不敏卡尔曼滤波算法(UKF)和扩展卡尔曼滤波算法(EKF)更好的跟踪性能。

**关键词** 最小偏度单行采样; 强跟踪滤波器; 极大后验估计; 指数加权; 不敏卡尔曼滤波

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2014.05.006

**中图分类号** V448.22 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2014)05-0025-05

## Stong Tracking Unscented Kalman Filter for Tracking A Ballistic Target Based on A Maximum Posterior Estimation

ZHANG Na-wen, WANG Yun, LIU Chang-yun, LI Shu-bin, ZHANG Chun-mei

(Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

**Abstract:** In order to solve the nonlinear tracking problems, a new nonlinear filter algorithm, i.e. stong tracking unscented kalman filter, on maximum posterior estimation is presented. The new algorithm adopts minimal skew simplex sampling strategy to reduce the computation time and insures the accuracy as well. Unexpected maneuvering is tracked stably by using strong tracking filter to calculate single-step forecast mean square error. The recursive equations of time-varying noise statistic estimator are given through exponential weight of the constant noise statistic estimator to calculate statistical property of system condition noise. For this reason, the capability of dealing with variable noise statistic is improved. The simulation results show that the tracking performance of the new method is better than that of the unscented kalman filter(UKF) and that of the extended kalman filter (EKF).

**Key words:** minimal skew simplex sampling ; stong tracking filter; maximum posterior estimation; exponential weight; unscented kalman filter

收稿日期: 2013-11-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61102109)

作者简介: 张纳温(1964-), 女, 江苏江阴人, 副教授, 主要从事信号与信息处理, 通信信号处理研究. E-mail: zhnwen@126.com

**引用格式:** 张纳温, 汪云, 刘昌云, 等. 基于极大后验估计的 STUKF 算法跟踪再入弹道目标[J]. 空军工程大学学报: 自然科学版, 2014, 15(5): 25-29. ZHANG Nawen WANG Yun LIU Changyun, et al. Stong Tracking unscented kalman filter for tracking a ballistic target based on a maximum posterior estimation[J]. Journal of air force engineering university: natural science edition, 2014, 15(5): 25-29.

对于非线性系统问题的研究,扩展卡尔曼滤波算法使用较早。它采用泰勒级数展开,将非线性问题做线性化处理,转化为近似的线性滤波问题。但扩展卡尔曼滤波算法在非线性强度的环境中,线性化误差容易增大,估计精度会明显下降,甚至发散<sup>[1]</sup>。对高斯分布的近似要比对非线性函数的近似简单的多,Julier 基于此思想提出不敏卡尔曼滤波算法(UKF)。UKF 算法是通过后验概率密度的近似来得到其次优解,具有更高的滤波精度和较好的稳定性。但由于计算误差累积和噪声信号等因素的影响,当预测均方误差阵无法满足正定要求时,滤波精度会下降,甚至发散<sup>[2]</sup>。粒子滤波算法(PF)不受线性化误差和高斯噪声假定的限制,适用于任何环境。但其同时存在粒子退化、重采样样本枯竭、计算量大等缺点,不适合用于再入弹道目标的实时滤波跟踪<sup>[3]</sup>。而对 UKF 算法的改进一般在于采样策略和滤波流程 2 个方面。采用比例修正的最小偏度单行采样策略可获得与对称采样相当的精度,并且计算效率明显提高<sup>[4]</sup>。强跟踪滤波器(STF)对突变状态的跟踪能力较强,系统初值统计特性的敏感性较低,计算复杂度适中。将 STF 与 UKF 算法相结合得到 STUKF 算法,在系统模型不确定时算法鲁棒性强且跟踪精度较高<sup>[5]</sup>。在噪声先验统计未知时变情况下,可采用指数加权的方法,利用次优无偏 MAP 时变噪声统计估计器,在线估计噪声的统计特性,提高系统对抗噪声的能力<sup>[6]</sup>。

基于上述分析,针对再入弹道目标再入时间短、运动状态突变性强、过程噪声未知时变等特点,本文提出了一种基于极大后验估计的 STUKF 算法跟踪再入弹道目标。

## 1 再入弹道目标模型建立

### 1.1 目标运动模型

假设条件:地基雷达观测垂直下落再入弹道目标<sup>[7]</sup>。此时,弹道目标的运动方程为:

$$\dot{h} = -v \quad (1)$$

$$\dot{v} = g \left( 1 - \frac{\rho(h)v^2}{2\beta} \right) \quad (2)$$

$$\dot{\beta} = 0 \quad (3)$$

式中: $h$  为高度; $v$  为速度; $\rho(h) = 1.754e^{-1.49 \times 10^{-4}h}$  为空气密度; $g$  为重力加速度; $\beta$  为弹道系数。

假设雷达跟踪目标的测量周期为  $T_s$ ,则离散时间状态模型方程为:

$$\mathbf{X}_{k+1} = f(\mathbf{X}_k) + \mathbf{v}_k =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_k - \begin{bmatrix} 0 \\ T \\ 0 \end{bmatrix} [D(\mathbf{X}_k) - g] + \mathbf{v}_k \quad (4)$$

式中: $\mathbf{X}_k = [h \quad v \quad \beta]$ ;  $\mathbf{v}_k$  为 0 均值高斯噪声;

$$D(\mathbf{X}_k) = \frac{g\rho(\mathbf{X}_k(1))\mathbf{X}_k^2(2)}{2\mathbf{X}_k(3)}, E[\mathbf{v}(k)] = 0 \quad (5)$$

$$\mathbf{Q}_k = E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\} = \begin{bmatrix} q_1 \frac{T^3}{3} & q_1 \frac{T^2}{2} & 0 \\ q_1 \frac{T^2}{2} & q_1 T & 0 \\ 0 & 0 & q_2 T \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中  $q_1, q_2$  是时变的,过程噪声特性未知且时变。

### 1.2 雷达观测模型

测量方程为:

$$\mathbf{Z}_{k+1} = h(\mathbf{X}_{k+1}) + \mathbf{w}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{k+1} + \mathbf{w}_{k+1} \quad (7)$$

式中, $\mathbf{w}_{k+1}$  为 0 均值高斯噪声,与状态噪声  $\mathbf{v}_k$  相互独立,方差  $R_k = E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \sigma_r^2$ 。

## 2 基于极大后验估计的 STUKF 算法

### 2.1 基于最小偏度单行采样的不敏变换

不敏变换使用确定性采样点通过非线性函数变换得到非线性函数点集,然后利用点集加权计算变换后的均值和协方差。最小偏度单行采样策略是采样方法中所需采样点点数最少的一种策略,在保证采样点集提取随机变量前两阶矩的前提下,使得其偏度(三阶矩)最小<sup>[8-9]</sup>。

将最小偏度单行采样用于不敏变换中。设  $\chi_i^j$  为  $j$  维空间采样点集中的第  $i$  个 Sigma 点。则:

$$\chi_i = \bar{X} + a \sqrt{p_X} \chi_i^j, i = 0, 1, \dots, L+1 \quad (8)$$

$$\omega_i^m = \begin{cases} \frac{\omega_0}{a^2} + \frac{1}{a^2} - 1, & i = 0 \\ \frac{1 - \omega_0}{2^L a^2}, & i = 1, 2 \\ \frac{2^{i-1} \omega_1}{a^2}, & i = 3, 4, \dots, L+1 \end{cases}$$

$$\omega_i^c = \begin{cases} \omega_0^m + 1 + \beta - a^2, & i = 0 \\ \omega_i^m, & i = 1, 2, \dots, L+1 \end{cases} \quad (9)$$

式中: $\omega_i^m, \omega_i^c$  为第  $i$  个采样点均值和协方差的权值; $a$  为控制采样点到中心点的距离,取值在  $0.001 \sim 1$  之间; $\beta$  为控制估计状态的峰值误差,最优  $\beta = 2$ ;

$0 \leq \omega_0 \leq 1, \omega_1 = (1 - \omega_0) / 2^L$ 。

采样点  $\chi_i^j$  通过非线性函数  $f$  实现状态迁移,即:

$$\mathbf{X}_{k+1|k}^i = f(\mathbf{X}_k^i) + \mathbf{q}_k, \quad i=0,1,\dots,L+1 \quad (10)$$

迁移后的点集计算状态均值和一步均方误差分别为:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{L+1} W_i^m \mathbf{X}_{k+1|k}^i + \mathbf{q}_k \quad (11)$$

$$\mathbf{p}_X^l = \sum_{i=0}^{L+1} W_i^c (\mathbf{X}_{k+1|k}^i - \hat{\mathbf{X}}_{k+1|k}) (\mathbf{X}_{k+1|k}^i - \hat{\mathbf{X}}_{k+1|k})^T + \mathbf{Q}_k \quad (12)$$

同理,可得量测的迁移变换为:

$$\mathbf{Z}_{k+1|k}^i = \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{X}_{k+1|k}^i) + \mathbf{r}_{k+1}, i=0,1,\dots,L+1 \quad (13)$$

利用迁移后的点集计算量测的均值、一步均方误差和互协方差分别为:

$$\hat{\mathbf{Z}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{L+1} W_i^m \mathbf{Z}_{k+1|k}^i + \mathbf{r}_{k+1} \quad (14)$$

$$\mathbf{p}_Z = \sum_{i=0}^{L+1} W_i^c (\mathbf{Z}_{k+1|k}^i - \hat{\mathbf{Z}}_{k+1|k}) (\mathbf{Z}_{k+1|k}^i - \hat{\mathbf{Z}}_{k+1|k})^T + \mathbf{R}_{k+1} \quad (15)$$

$$\mathbf{p}_{XZ} = \sum_{i=0}^{L+1} W_i^c (\mathbf{X}_{k+1|k}^i - \hat{\mathbf{X}}_{k+1|k}) (\mathbf{Z}_{k+1|k}^i - \hat{\mathbf{Z}}_{k+1|k})^T \quad (16)$$

### 2.2 强跟踪 UKF 算法

借鉴 Cholesky 分解思想,将 Cholesky 分解后的多重次优渐消因子应用到状态一步预测均方误差阵计算中,在线调整状态一步预测均方误差阵,提高系统对突发机动跟踪的稳定性<sup>[10-11]</sup>。假设多重渐消因子矩阵  $\mathbf{A}_{k+1} = \text{diag}\{\lambda_{1,k+1}, \lambda_{2,k+1}, \dots, \lambda_{L,k+1}\}$ ,系统先验确定  $\lambda_{1,k+1} : \lambda_{2,k+1} : \dots : \lambda_{L,k+1} = a_1 : a_2 : \dots : a_L$ 。取  $\lambda_{i,k+1} = a_i c_{k+1}$ ,式中  $a_i \geq 1, c_{k+1}$  为待定因子。且有:

$$c_{k+1} = \text{tr}[\mathbf{N}_{k+1}] / \text{tr}[\mathbf{M}_{k+1}] \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{N}_{k+1} = \mathbf{V}_{k+1} - \mathbf{R}_{k+1} - [\mathbf{p}_{XZ}]^T (\mathbf{p}_X^l)^{-1} \mathbf{Q}_k (\mathbf{p}_X^l)^{-1} [\mathbf{p}_{XZ}]$ ,  $\mathbf{V}_{k+1}$  为残差方差阵,且有  $\mathbf{V}_{k+1} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^T, & k=0 \\ \frac{\rho \mathbf{V}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^T}{1+\rho}, & k \geq 1 \end{cases}; \mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{p}_Z - \mathbf{V}_{k+1} + \mathbf{N}_{k+1}$ ;

$\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = \mathbf{Z}_{k+1} - \hat{\mathbf{Z}}_{k+1|k}$ ;  $0 < \rho \leq 1$  为遗忘因子。

对渐消因子  $\mathbf{A}_{k+1}$  进行 Cholesky 分解,得到:

$$\mathbf{A}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}_{k+1} \bar{\mathbf{A}}_{k+1} = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_{1,k+1}}, \sqrt{\lambda_{2,k+1}}, \dots, \sqrt{\lambda_{L,k+1}}\} \quad (18)$$

将上式代入状态一步预测均方误差矩阵中,即:

$$\mathbf{p}_X = \bar{\mathbf{A}}_{k+1} \left( \sum_{i=0}^{L+1} W_i^c (\mathbf{X}_{k+1|k}^i - \hat{\mathbf{X}}_{k+1|k}) (\mathbf{X}_{k+1|k}^i - \hat{\mathbf{X}}_{k+1|k})^T \right) \bar{\mathbf{A}}_{k+1}^T + \mathbf{Q}_k \quad (19)$$

### 2.3 渐消记忆指数加权时变噪声统计估计器

由于再入弹道目标的过程噪声难以确定,可采

用渐消记忆指数加权法,结合次优无偏 MAP 时变噪声估计器<sup>[6]</sup>,对过程噪声在线估计,提高滤波精度。具体算法公式为:

$$\mathbf{q}_{k+1} = (1-d_{k+1}) \mathbf{q}_k + d_{k+1} \left[ \hat{\mathbf{X}}_{k+1} - \sum_{i=0}^{L+1} W_i^m \mathbf{X}_{k+1|k}^i \right] \quad (20)$$

$$\mathbf{Q}_{k+1} = (1-d_{k+1}) \mathbf{Q}_k + d_{k+1} \mathbf{K}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^T \mathbf{K}_{k+1}^T - d_{k+1} \bar{\mathbf{A}}_{k+1} \left( \sum_{i=0}^{L+1} W_i^c (\mathbf{X}_{k+1|k}^i - \hat{\mathbf{X}}_{k+1|k}) (\mathbf{X}_{k+1|k}^i - \hat{\mathbf{X}}_{k+1|k})^T \right) \bar{\mathbf{A}}_{k+1}^T \quad (21)$$

式中:  $d_{k+1} = (1-b)/(1-b^k)$ ,  $b$  为遗忘因子,通常取  $0.95 < b < 0.99$ ;  $\mathbf{K}_{k+1}$ 、 $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$ 、 $\mathbf{p}_{k+1}$  分别为滤波增益、状态估计和滤波均方误差,且有:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{p}_{XZ} \mathbf{p}_Z^{-1} \\ \hat{\mathbf{X}}_{k+1} = \hat{\mathbf{X}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \\ \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_X - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{p}_Z \mathbf{K}_{k+1}^T \end{cases} \quad (22)$$

### 2.4 基于极大后验估计的 STUKF 算法

基于极大后验估计的 STUKF 算法步骤为:

- 1)  $k=0$  时,初始化状态  $\mathbf{X}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{Q}_0, \mathbf{R}$ , 设置参数  $a, \beta, \omega_0 a_i, \rho, b$ ;
- 2) 预测和更新,通过式(10)~式(16),获得 UT 变换后点集的均值和方差;
- 3) UKF 算法,通过式(17)~式(19),计算  $\mathbf{p}_X$ ;
- 4) 量测更新,根据式(22)求得滤波增益、状态估计和滤波均方误差;
- 5) 过程噪声递推估计。

## 3 仿真分析

### 3.1 仿真场景

假定仿真场景:雷达的测量周期  $T=0.1$  s,目标初始状态、初始状态方差和参数初始化分别为:

$$\mathbf{X}_0 = [61 \quad 3048 \quad 36 \quad 500]^T$$

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & \sigma_r^2/T & 0 \\ \sigma_r^2/T & 2\sigma_r^2/T^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix}$$

式中:  $\sigma_r = 200$  m,  $\sigma_\beta = 14 \ 814$  kg/ms<sup>2</sup>。  $a = 0.01, \beta = 2, \omega_0 = 0.25, \rho = 0.95, b = 0.98$ 。

系统过程噪声由下式确定:

$$\mathbf{Q}_k = \begin{cases} q_1 = 1, q_2 = 1, & 0 \leq k \leq 100 \\ q_1 = 5, q_2 = 5, & 100 < k \leq 200 \\ q_1 = 10, q_2 = 10, & 200 < k \leq 300 \end{cases}$$

### 3.2 仿真结果

典型的弹道目标的位置、速度和加速度曲线见图 1。

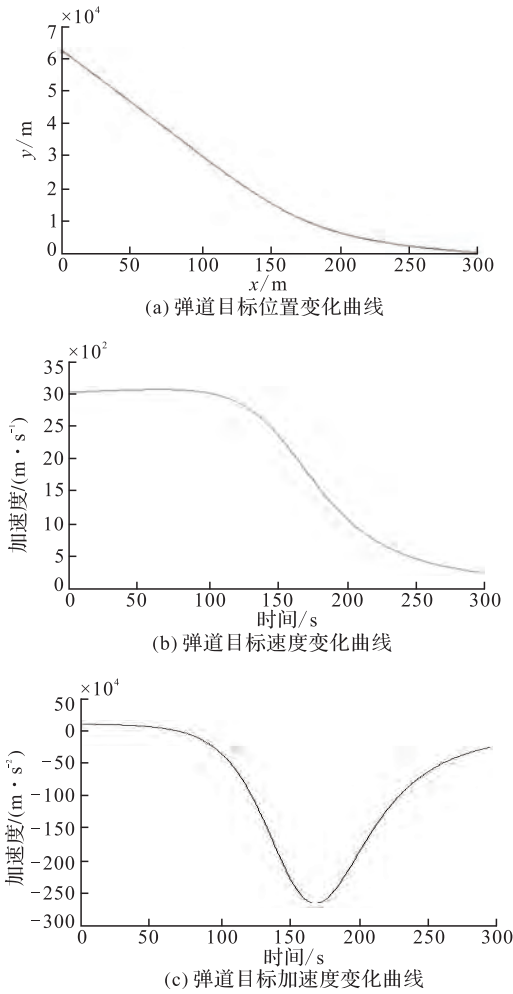


图1 弹道目标理想航迹图

Fig.1 Ideal track map of the Ballistic target

用 100 次 Monto-Calo 仿真实验统计得到跟踪滤波算法的跟踪性能。EKF、UKF、STUKF 跟踪滤波算法的跟踪均值误差和跟踪均方差见图 2 和图 3。

由图 2、图 3 的仿真结果和表 1 的统计数据可知:STUKF 和 UKF 的跟踪性能远远优于 EKF,且基于最小偏度单行采样 STUKF 算法在引入强跟踪和系统噪声在线估计后,算法计算复杂度相比普通 UKF 算法有少量的提高,但跟踪精度上大大优于 UKF。综合比较可得:STUKF 算法性能优于 EKF 和 UKF。

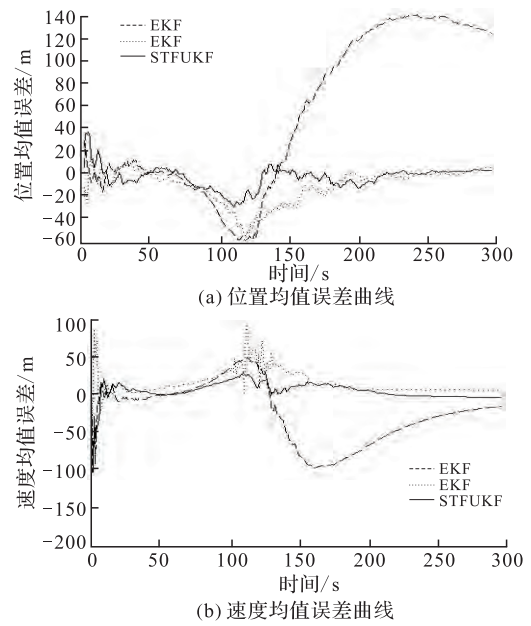


图 2 3 种跟踪滤波算法的跟踪均值误差比较  
Fig.2 Comparison with three filter algorithm of mean Tracking error

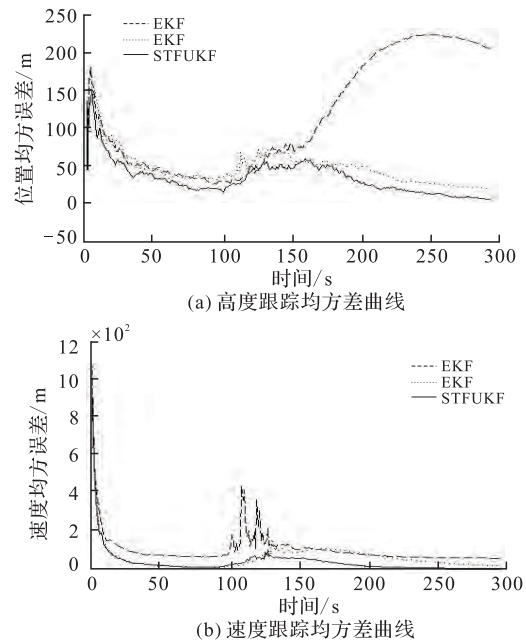


图 3 3 种跟踪滤波算法的跟踪均方差比较  
Fig.3 RMSE comparison of three filter algorithms

EKF、UKF 和 STUKF 3 种跟踪滤波算法的绝对均值误差和运算时间统计结果见表 1。

表 1 算法误差对比及运算时间统计

Tab.1 The compare of algorithmic error and statistic of runtime

算法	位置 MAE/m	速度 MAE/(m·s <sup>-1</sup> )	位置 RMSE/m	速度 RMSE/(m·s <sup>-1</sup> )	平均运算时间/s
EKF	82.034 7	28.862 9	121.436 1	175.357 8	0.0835 8
UKF	13.567 3	15.386 7	53.826 2	48.457 2	0.6552 3
STUKF	6.331 3	8.817 6	41.883 2	25.525 8	0.6739 8

## 4 结语

基于极大后验估计的 STUKF 算法,使用最小偏度单行采样策略进行确定性采样,引入带有多重次优渐消因子的强跟踪算法,在线调整状态一步预测均方误差阵,采用指数加权的方法,利用次优无偏 MAP 时变噪声统计估计器,在线估计未知系统过程噪声的统计特性,用于过程噪声未知时变的再入弹道目标跟踪中,具有良好的跟踪性能。仿真结果表明:STUKF 算法跟踪性能优于 EKF 和 UKF。

### 参考文献 (References):

- [1] 郭尊华,谢维信.弹道导弹跟踪技术进展[J].信号处理,2009,28(8):578-581.  
GUO Zunhua,XIE Weixin. Progress of ballistic missile tracking technology[J].Signal processing,2009,28(8):578-581.(in Chinese)
- [2] 王昌海,曲长文,徐征.基于改进 SRUKF 的多机无源定位跟踪算法[J].雷达科学与技术,2012,5:492-496.  
WANG Changhai,QU Changwen,XU Zheng. Passive location tracking algorithm of multi-machine based on improved SRUKF [J].Radar science and technology,2012,5:492-496.(in Chinese)
- [3] 陈出新,周德云.三种非线性滤波在再入弹道估计中的分析研究[J].战术导弹技术,2012,52(1):43-49.  
CHEN Chuxin,ZHOU Deyun. Analysis of three kinds nonlinear filterings in reentry trajectory estimation [J].Tactical missile technology,2012,52(1):43-49.(in Chinese)
- [4] 潘泉,杨峰,叶亮.一类非线性滤波器——UKF 综述[J].控制与决策,2005,20(5):482-489.  
PAN Quan,YANG Feng, YE Liang. Summary of non-linear filter-UKF [J]. Control and decision,2005,20(5):482-489.(in Chinese)
- [5] 王小旭,赵琳,夏全喜.基于 Unscented 变换的强跟踪滤波器[J].控制与决策,2010,25(7):1063-1068.  
WANG Xiaoxu,ZHAO Lin,XIA Quanyi. Strong tracking filter based on unscented transform [J]. Control and decision,2010,25(7):1063-1068.(in Chinese)
- [6] 赵琳,王小旭,孙明.基于极大后验和指数加权的自适应 UKF 滤波算法[J].自动化学报,2010,36(7):1007-1019.  
ZHAO Ling,WANG Xiaoxu,SUN ming. UKF filtering algorithm based on adaptive weighted index of maximum a posteriori [J].Automatica journal,2010,36(7):1007-1019.(in Chinese)
- [7] ZHANG Jungeng,JI Hongbing. Modified iterated extended kalman filter based multi-observer fusion tracking for IRST[J].System engineering and electronics,2010,32(3):504-507.
- [8] SHI Yong,HAN Chongzhao. Adaptive UKF method with application to target tracking[J].Acta automatica sinica,2011,37(6):755-759.
- [9] Dash P K,Hasan S,Panigrahi B K. Adaptive complex unscented kalman filter for frequency estimation of time-varying signals[J].IET Sci meas technol,2010,4(2):93-103.
- [10] XIE Xianming,PI Yiming,PENG Bao. Phase unwrapping: an unscented particle filtering approach[J].Acta electronica sinica,2011,39(3):705-709.
- [11] SUN Yao,ZHANG Qing,WAN Lei. Small autonomous underwater vehicle navigation system based on adaptive UKF algorithm[J].Acta automatica sinica,2011,37(3):342-353.

(编辑:田新华)