

基于改进 GM(1,1)模型的弹道导弹位置信息预测

齐德庆¹, 李为民², 王还乡¹, 李龙跃¹

(1. 空军工程大学导弹学院, 陕西三原, 713800; 2. 空军工程大学训练部, 陕西西安, 710051)

摘要 针对弹道导弹速度快、雷达反射截面积小, 预警雷达很难全程跟踪预警的问题, 提出了使用改进的 GM(1,1)模型对其位置信息进行预测。从初始序列光滑度、背景值构造方式和初始条件 3 方面进行综合改进, 建立了新的改进模型, 明确了建模步骤。仿真结果表明, 改进后的模型比传统 GM(1,1)模型适用范围更广, 精度更高, 可以用于弹道导弹的位置信息预测。

关键词 改进 GM(1,1)模型; 位置信息预测; 弹道导弹

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2012.01.009

中图分类号 TJ761.3 **文献标识码** A **文章编号** 1009-3516(2012)01-0037-05

在弹道导弹预警探测中, 预警雷达发挥着重要作用, 担负着对来袭弹道导弹跟踪预警、确定目标位置信息、指示拦截系统尽快发射导弹对其进行拦截的任务。新型弹道导弹具有射程远、再入速度快、精度高、雷达反射截面积小等特点, 使预警雷达难以持续的对其进行预警探测^[1]。由于对弹道导弹的位置信息监测具有不连续性, 有典型的部分信息已知、部分信息未知的灰色系统特征。而建立在灰色系统理论上的 GM(1,1)模型主要用来对小样本、贫信息问题进行预测, 解决了不少工程技术中的实际问题^[2-6]。但传统 GM(1,1)模型对输入数据要求较为严格且预测精度有待提高, 使其适用范围具有一定局限性。本文提出的改进 GM(1,1)模型, 进一步扩展了应用范围, 提高了精度, 使其适合在弹道导弹位置信息预测中使用。

1 改进的 GM(1,1)模型

1.1 初始序列光滑度的改进

原始数据序列的光滑度在很大程度上影响了预测模型精度。原始序列数据变化越平缓, GM(1,1)模型的发展系数的绝对值越小, 模型的拟合与预测精度越高。然而在实际问题中原始的数据序列光滑度往往比较低, 这样就大大降低了灰色模型的预测精度。因此在建模前, 可以对原始数据序列进行处理, 以提高数据的光滑度。常用的提高原始数据的光滑度的方法主要是对数据序列进行对数函数变换、幂函数变换以及指数函数变换^[7]。本文采用常用的对数函数变换, 即对原始数据 $X^{(0)}$ 作对数变换, 得到 $X'^{(0)}$, 最后使用 $\exp(\hat{X}^{(0)})$ 对模拟值进行还原。

1.2 背景值构造方式的改进

模型拟合精度主要取决于 a, b 的值, 而 a, b 的值又取决于 $z^{(1)}(k)$ 。因此背景值 $z^{(1)}(k)$ 成为影响 GM(1,1)模型精度的重要因素。分析误差根源, 可将白化方程在 $[k-1, k]$ 上积分: $\int_{k-1}^k \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} dt + a \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = b$, 即 $x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) + a \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = b$, 又等于 $x^{(0)}(k) + a \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = b$ 。对比灰色微分方程: $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$ 发现, 传统 GM(1,1)模型用 $z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}[x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)]$

* 收稿日期: 2011-06-03

基金项目: 国家“863”计划资助项目(08AAAXXX105)

作者简介: 齐德庆(1986-)男, 安徽太和人, 硕士生, 主要从事防空反导作战实验理论技术研究。

E-mail: qdq18700015683@163.com

近似代替了 $\int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt$ 。而背景值 $z^{(1)}(k)$ 实际上是 $x^{(1)}(t)$ 在区间 $[k-1, k]$ 上的定积分, 上述的近似代替就是用梯形公式计算的面积来代替以 $x^{(1)}(t)$ 作为曲边的曲边梯形面积。当数据序列变化较平缓时, 用两种方法计算的面积相差不大, 误差较小。而当数据序列变化急剧时, $x^{(1)}(k-1)$ 与 $x^{(1)}(k)$ 值相差较大, 两种梯形面积值相差较大, 模型会出现较大误差, 需要对模型进行改造。因此要提高预测精度, 需尽可能地减少模型中背景值 $z^{(1)}(k)$ 的计算误差。背景值改进公式见文献[8]。

1.3 初始条件的改进

传统的 GM(1,1) 模型选用 $x^{(0)}(1)$ 作为初值, 对新信息利用不充分。事实上, 越新的数据对预测值的影响越大^[9]。以 $x^{(1)}(n)$ 为初值, 建立 GM(1,1) 模型, 这种方法充分利用了新信息, 预测精度将大为提高。文献[10]给出了灰色微分方程 $x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = b$ 的时间响应函数和还原值分别为:

$$x^{(1)}(k) = x^{(1)}(n) - \frac{b}{a} \left(e^{-a(k-n)} + \frac{b}{a} \right), k=1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$x^{(0)}(k+1) = x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) = (e^{-a} - 1)x^{(1)}(n) - \frac{b}{a} \left(e^{-a(k-n)} \right), k=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

2 改进 GM(1,1) 模型的建立与精度检验

2.1 改进 GM(1,1) 模型建模步骤

1) 对已知原始数据列 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ 作对数变换, 得到平滑度较高的新数据列 $X^{(0)'} = (\ln x^{(0)}(1), \ln x^{(0)}(2), \dots, \ln x^{(0)}(n))$;

2) 对新数据列 $X^{(0)'}$ 作 1 次累加 (1-AGO), 得到累加数据列 $X^{(1)}$;

3) 计算 $X^{(1)}$ 紧邻均值生成序列 $Z^{(1)}$;

4) 对参数列 $\hat{a} = [a, b]^T$ 进行计算, 求发展系数 $-a$ 和灰色作用量 b ;

5) 得到模型的时间响应式, 求出 $X^{(1)}$ 的模拟值 $\hat{X}^{(1)}$;

6) 求出 $\hat{X}^{(1)}$ 的还原值 $\hat{X}^{(0)}$, 使用 $\exp \hat{X}^{(0)}$ 还原出 $X^{(0)}$;

7) 对模型进行精度检验, 取 $k = n + 1$, 计算 $\hat{X}^{(1)}$ 后还原即可预测出下个未知数据。

2.2 精度检验

模型可否用来预测, 必须对其精度进行检验, 只有通过检验的模型才能使用, 最常用的是后验差方法^[10]。记原始序列 $x^{(0)}$ 及残差序列 ε 的方差分别为 S_1^2 和 S_2^2 , 计算后验差比值 $C = \frac{S_2}{S_1}$ 和小误差概率 $p = P(|\varepsilon(k) - \bar{\varepsilon}| < 0.674 5 S_1)$, 根据这两项指标检验模型精度, 具体内容见表 1。

表 1 预测模型检验等级表

Tab. 1 Test grade of prediction model

指标	1 级(好)	2 级(合格)	3 级(勉强)	4 级(不合格)
p	$0.95 \leq p$	$0.80 \leq p < 0.95$	$0.70 < p < 0.8$	$p \leq 0.70$
C	$C \leq 0.35$	$0.35 < C \leq 0.5$	$0.5 < C \leq 0.65$	$0.65 < C$

3 仿真分析

以雷达探测的弹道导弹方位角信息为例, 取 3 组变化趋势不同的原始数据: ① 134.49, 142.23, 162.97, 187.46, 215.91, 265.23; ② 134.82, 151.96, 191.95, 238.36, 356.54, 504.75; ③ 27.02, 95.26, 250.69, 516.63, 1 438.12, 4 635.24。分别使用传统和改进 GM(1,1) 模型进行拟合。

第 1 组数据变化趋势较平缓, 在 2 种模型下分别作准光滑性和准指数规律检验, 能很好满足准光滑条件和准指数规律, 2 种模型均可建模。

第 2 组数据变化趋势较急剧, 基本满足准光滑条件和准指数规律, 2 种模型均可建模。

第 3 组数据变化很急剧, 在传统 GM(1,1) 模型下不满足准光滑条件和准指数规律, 不能使用传统模型进行建模。但在改进 GM(1,1) 模型下, 经对数变换得到的数据满足准光滑条件和准指数规律, 可以建模。

3 组数据仿真计算结果如下:

1) 第 1 组数据计算结果。根据表中的原始数据和建模步骤,改进 GM(1,1)模型为:

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = 193.1690e^{0.0292(k-6)} - 162.0274, k=1, 2, \dots, n \\ \hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), k=2, 3, \dots, n \end{cases}$$

经 $\exp(\hat{x}^{(0)}(k))$ 还原得到模拟值。

根据 1.1 介绍,传统 GM(1,1)模型为:

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = 812.1272e^{0.1572k} - 677.6372, k=1, 2, \dots, n \\ \hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), k=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

误差检验表和方位角曲线见表 2、图 1。

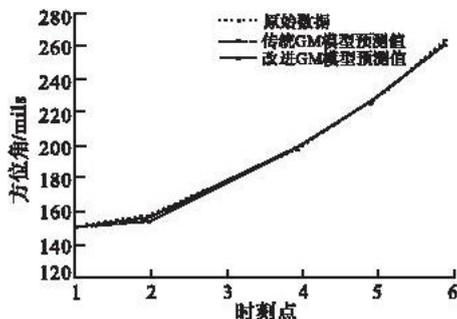


图 1 灰色预测方位角曲线

Fig. 1 Predicted azimuth of target

表 2 误差检验表

Tab. 2 Test table of error

序号	$x^{(0)}(k)$	$x^{(0)}(k)$		$\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$		$k = \frac{ \varepsilon(k) }{x^{(0)}(k)} (\%)$	
		传统模型	改进模型	传统模型	改进模型	传统模型	改进模型
1	134.49	134.490 0	134.437 6	0.000 0	0.052 4	0.000 0	0.038 9
2	142.23	138.210 9	140.639 5	4.019 0	1.590 5	2.825 7	1.118 3
3	162.97	161.732 2	162.828 9	1.237 7	0.141 1	0.759 5	0.086 9
4	187.46	189.256 5	189.350 5	-1.796 5	-1.890 5	0.958 3	1.008 4
5	218.91	221.464 9	221.185 1	-2.554 9	-2.275 1	1.167 1	1.027 3
6	262.23	259.154 0	259.511 2	3.076 0	2.718 8	1.173 0	1.036 8

改进模型后验差比值 $C = 0.0227 < 0.35$, 小误差概率 $p = 1 > 0.95$, 模型精度为 1 级, 可进行预测, 模型平均相对误差 $\Delta = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \Delta_k = 0.7194\%$, 传统模型平均相对误差 $\Delta = \frac{1}{5} \sum_{k=2}^6 \Delta_k = 1.3767\%$ 。由平均相对误差看出, 改进模型精度高于传统模型。

2) 第 2 组数据计算结果。根据表中原始数据和建模步骤,改进 GM(1,1)模型为:

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = 114.7130e^{0.0557(k-6)} - 81.9246, k=1, 2, \dots, n \\ \hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), k=2, 3, \dots, n \end{cases}$$

经 $\exp(\hat{x}^{(0)}(k))$ 还原得到模拟值。

传统 GM(1,1)模型为:

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = 326.8081e^{0.333k} - 191.9881, k=1, 2, \dots, n \\ \hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), k=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

误差检验表和灰色预测方位角曲线见表 3、图 2。

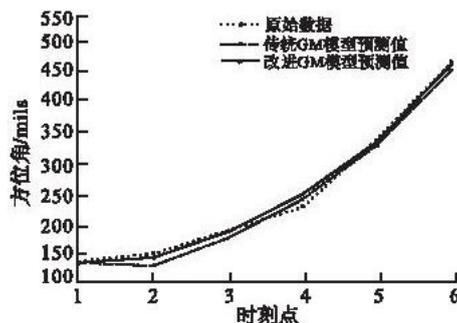


图 2 灰色预测方位角曲线

Fig. 2 Predicted azimuth of target

表 3 误差检验表

Tab. 3 Test table of error

序号	$x^{(0)}(k)$	$x^{(0)}(k)$		$\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$		$k = \frac{ \varepsilon(k) }{x^{(0)}(k)} (\%)$	
		传统模型	改进模型	传统模型	改进模型	传统模型	改进模型
1	134.82	134.820 0	134.796 3	00.000 0	0.023 7	00.000 0	0.020 2
2	151.96	129.137 3	144.541 7	22.822 7	7.418 3	15.018 9	4.881 7
3	191.95	180.165 6	192.183 4	11.784 4	-0.233 4	6.139 3	0.121 6
4	238.36	251.357 5	259.735 3	-12.997 5	-21.375 3	5.452 9	8.810 2
5	356.54	350.680 8	357.138 3	5.859 2	-0.598 3	1.643 3	0.167 8
6	504.75	489.251 4	500.108 5	15.498 6	4.641 5	3.070 5	0.919 6

改进模型后验差比值 $C = 0.0528 < 0.35$, 小误差概率 $p = 1 > 0.95$, 模型精度为 1 级, 可进行预测。改进模型平均相对误差 $\Delta = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \Delta_k = 2.4869\%$, 传统模型平均相对误差 $\Delta = \frac{1}{5} \sum_{k=2}^6 \Delta_k = 6.2650\%$ 。由平均相对误差看出, 改进模型精度仍高于传统模型。

3) 第 3 组数据计算结果。根据表中原始数据和建模步骤, 建立改进 GM(1,1) 模型为:

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k) = 61.0233e^{0.1491(k-6)} - 25.6861, k=1, 2, \dots, n \\ \hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), k=2, 3, \dots, n \end{cases}$$

经 $\exp(\hat{x}^{(0)}(k))$ 还原得到模拟值。

改进 GM(1,1) 模型误差检验表和灰色预测方位角曲线见图 3、表 4。

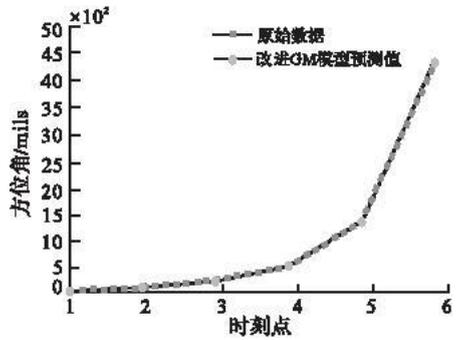


图 3 灰色预测方位角曲线

Fig. 3 Predicted azimuth of target

表 4 误差检验表

Tab. 4 Test table of error

序号	$x^{(0)}(k)$	$x^{(0)}(k)$	$\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$	$k = \frac{ \varepsilon(k) }{x^{(0)}(k)} (\%)$
		改进模型	改进模型	改进模型
1	27.02	26.2929	0.7271	2.6910
2	95.26	105.1828	-10.0228	10.5215
3	250.69	222.3605	28.5188	11.3761
4	516.63	530.1712	-13.5412	2.6211
5	1438.12	1453.7475	-15.6275	1.0867
6	4635.24	4688.1813	-52.9413	1.1421

改进模型后验差比值 $C = 0.0103 < 0.35$, 小误差概率 $p = 1 > 0.95$, 预测模型精度为 1 级, 可进行预测。改进 GM(1,1) 模型平均相对误差 $\Delta = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \Delta_k = 4.9064\%$ 。

综合分析 3 组仿真结果, 由前两组可以看出, 改进模型模拟精度高于传统模型, 有较为精确、可靠的预测效果。第 3 组数据由于变化过于急剧, 原始数据不满足准光滑性条件和准指数规律, 传统模型不再适用; 改进模型引入对数变换方法对原始数据进行处理, 变换后数据普遍较小, 相差不大, 满足准光滑性条件和准指数规律, 使原始数据满足模型要求。

该模型通过对数变换进行数据处理有效的扩大了适用范围, 完善了基于灰色理论的预测模型在实际问题中应用。同时, 在增大了数据序列光滑度的基础上优化了背景值构造方式和初始条件, 有效的减小了误差, 提高了预测精度, 从表 4 和图 3 可看出, 改进模型对第 3 组数据仍有 1 级的预测精度。

4 结束语

由仿真结果可以看出, 改进模型扩展了适用范围, 提高了预测精度, 可用于弹道导弹位置信息预测中。实际预测中可引入新陈代谢的模型, 将新数据补充入序列, 同时剔除旧数据, 再结合改进 GM(1,1) 模型, 可进一步提高预测精度。对目标探测过程中, 可使用 GM(1,1) 模型对其进行预测。如果预警雷达持续跟踪目标成功, 可用实际探测值取代预测值, 对下一点进行预测; 而如果预警雷达持续跟踪目标失败, 可立即转到预测点附近进行重点扫描, 增大发现概率, 避免盲目搜索。在预警过程中, 可采用这种边跟踪边预测的方法, 增加持续跟踪预警的成功率, 这种方法在弹道导弹预警中具有现实的实用意义。

对比传统模型, 虽然精度普遍较高, 但对原始数据有一定要求, 存在着个别点残差偏高的现象, 在后续研究中需要进一步改进, 使模型更加准确、实用。

参考文献 (References):

[1] 袁俊. 目前弹道导弹预警系统的主要问题和缺陷[J]. 中国航天, 2003(4): 40-41.

- YUAN Jun. Problems and limitation of ballistic missile early - warning system[J]. Aerospace China,2003(4):40 - 41. (in Chinese)
- [2] L CH su. Applying the Grey prediction model to the global integrated circuit industry[J]. Technological forecasting and social change, 2003(70): 563 - 574.
- [3] Jiang Y, Li S. Gray system model for estimating the pavement international roughness index[J]. Journal of performance of constructed facilities, 2005(19): 62 - 68.
- [4] Zhang Z Y, Chen Y Q, Lu X S. An improved grey model and Its application research on the prediction of real - time GPS satellite clock errors[J]. Chinese astronomy and astrophysics,2009,9(3): 72 - 89.
- [5] Lin Y H , Lee P C, Chang T P. Adaptive and high - precision grey forecasting model[J]. Expert systems with applications, 2009(36): 9658 - 9662.
- [6] Zhou P, Ang B W, Poh KL. A trigonometric grey prediction approach to forecasting electricity demand [J]. Energy, 2006(31): 2839 - 2847.
- [7] 王园园. 基于改进背景值的 GM(1,1)模型的农业用水量预测[J]. 安徽农业科学,2009,37(5),1865 - 1866.
WANG Yuanyuan. Prediction of agricultural water consumption based on GM(1,1) model with the improved background value [J]. Journal of Anhui agri sci,2009,37(5),1865 - 1866. (in Chinese)
- [8] 刘乐,王洪国,王宝伟. 基于背景值构造方法的 GM(1,1)模型优化[J]. 统计与决策,2009(1):153 - 155.
LIU Le, WANG Hongguo, WANG Baowei. Optimization of GM(1,1) modeling based on background value method[J]. Statistics and decision,2009(1):153 - 155. (in Chinese)
- [9] 党耀国,刘思峰,刘斌. 以 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的 GM 模型[J]. 中国管理科学,2005,13(1):132 - 134.
DANG Yaoguo, LIU Sifeng, LIU Bin. The GM models that $x^{(1)}(n)$ be taken as initial value[J]. Chinese journal of management science,2005,13(1):132 - 134. (in Chinese)
- [10] 刘思峰,党耀国,方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2004.
LIU Sifeng, DANG Yaoguo, FANG Zhigeng. Grey system theory and practice[M]. Beijing: Science publishing company. (in Chinese)

(编辑:田新华)

Prediction of the Ballistic Missile Position Information Based on Improved GM (1 , 1) Model

QI De - qing¹, LI Wei - min², WANG Huan - xiang¹, LI Long - yue¹

(1. Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China; 2. Department of Training, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: Aimed at the problems that the ballistic missile is quick in speed, the RCS of radar is small and it is very difficult for the early - warning radar to track the whole early - warning course, the improved GM (1 , 1) model is advanced to predict the position information of the ballistic missile. The smooth degree of original date sequence, the conformation method of background value and the beginning condition are improved in the new model, at the same time, an improved new model is built and the modeling steps are put forward. The simulation result shows that compared with the traditional GM (1 , 1) model, the prediction precision of the improved model is greatly improved and the application area is extended, so it can be used to predict the position information of the ballistic missile.

Key words: improved GM (1 , 1) model; position information; prediction