

多层弹道导弹防御体系火力分配模型求解算法研究

田野¹, 周晓光¹, 李为民¹, 张蓓蓓²

(1. 空军工程大学导弹学院, 陕西 三原 713800; 2. 空司军务部, 北京 100843)

摘要 研究了多层弹道导弹防御体系火力分配问题。首先对多层弹道导弹防御体系火力分配问题进行了描述;其次建立了基于最大化资源剩余价值目标函数的多层弹道导弹防御体系火力分配模型;多层弹道导弹防御体系火力分配模型是非线性 NP 难问题,针对目标函数的特点,应用线性逼近的方法,建立了易于求解的多层弹道导弹防御体系火力分配模型的近似线性规划模型;最后针对具体实例,应用多层弹道导弹防御体系火力分配线性规划模型,采用分之定界算法进行求解,仿真结果验证了模型的有效性及时效性。

关键词 多层弹道导弹防御体系;火力分配;线性规划

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2011.04.008

中图分类号 TP391 **文献标识码** A **文章编号** 1009-3516(2011)04-0033-06

国内外弹道导弹防御体系发展的一个重要趋势是构建具备多层拦截能力的弹道导弹防御体系^[1-3]。按照弹道导弹的飞行阶段,其防御体系一般分为4层^[4-5]:兼有助推段的上升段防御层、中段防御层、末端高层防御层和末端低层防御层。

现阶段,关于弹道导弹防御体系火力分配的研究大多是针对于某一段或者某一层^[6-7],不能构成多层弹道导弹防御体系整体上的优化,因此,本文以多层弹道导弹防御体系火力分配为研究对象,应用动态规划理论,力求获得多层弹道导弹防御体系火力分配问题的整体最优。

1 多层弹道导弹防御体系火力分配模型

1.1 模型假设

多层弹道导弹防御体系火力分配模型与许多因素有关,比如防御策略、目标特性、武器及真实的作战环境等等。为简化问题,模型仅考虑一波次来袭 T 个 TBM 目标的武器-目标动态分配问题。假定防御方有 W 个武器系统构成的 S 层弹道导弹防御体系对 K 个资源进行防御,防御方可以判断出来袭 TBM 目标的落点并且采用“Shoot-Look-Shoot”射击策略。

1.2 多层弹道导弹防御体系火力分配目标函数

火力分配问题的目标函数可以分为2种:①基于 TBM 目标,对 TBM 目标进行威胁分析,赋予一定的价值,目标函数是最小化 TBM 目标价值;②基于保卫资源的,对保卫资源进行等级划分,赋予一定的价值,目标函数是最大化保卫资源价值。本文采用第2种方式构建目标函数。目标函数中所采用的符号意义见表1。

* 收稿日期:2010-11-24

基金项目:国家“863”计划资助项目(2009AA701XXX)

作者简介:田野(1984-),女,山西临汾人,讲师,硕士,主要从事智能信息处理研究。E-mail:xrff641@sohu.com

表1 符号及意义

Tab. 1 Meaning of notation

S :反导作战持续时间;	t, h :时间索引;
$T(t)$:时刻 t 的目标 TBM 的数量;	$K(t)$:时刻 t 多层反导防御体系防御目标数量;
$W(t)$:时刻 t 中可用的武器数量;	J_k :以防御目标 k 为进攻目标的 TBM 的集合
$\mathbf{X}^t = [\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+1}, \dots, \mathbf{X}_S]$:分配策略,其中 $\mathbf{X}_t = [x_{ij}(t)]_{w \times T}$ 为决策变量,如果武器 i 分配给目标 j ,则 $x_{ij}(t) = 1$,否则 $x_{ij}(t) = 0$;	v_k :资源 k 的重要程度; q_{jk} :来袭 TBM 目标 j 对资源 k 的杀伤概率; p_{ij} :阶段 t 武器 i 对 TBM 目标 j 的杀伤概率。

火力分配问题的目的就是使得最后的资源生存值达到最大^[7-9],因此,构建的多层弹道导弹防御体系火力分配问题的目标函数为^[10]:

$$J_t(\mathbf{X}^t) = \sum_{k=1}^{K(t)} v_k \prod_{j \in J_k} \left[1 - q_{jk} \prod_{h=t}^S \prod_{i=1}^{W(h)} (1 - p_{ij}(h))^{x_{ij}(h)} \right], \quad t \in \{1, 2, \dots, S\} \quad (1)$$

从式(1)可以看出,该目标函数可以确保从时间 t 开始的火力分配是最优的,属于 0-1 动态规划问题。

1.3 多层弹道导弹防御体系火力分配约束条件

多层弹道导弹防御体系火力分配约束主要有 4 个:①组成每层防御体系各反导火力拦截平台拦截弹数量的限制,构建约束条件见式(2),其中 n_i 是在时刻 t 武器系统 i 最大可用拦截弹数量;②射击策略限制,即对于 TBM 目标 j 而言,在时刻 t 用于对其拦截的拦截弹数量不能大于预先确定的最大阈值 m_j ,构建约束条件见式(3);③武器系统可用拦截弹数量限制,构建约束条件见式(4),其中 N_i 为武器 i 的最大可用拦截弹数量;④是各时刻的可用武器的限制,构建约束条件见式(5),式中 $f_{ij}(t)$ 是在时刻 t 武器系统 i 拦截 TBM 目标 j 的可行性示意函数,在时刻 t 武器系统 i 拦截目标 j 是可行的,则 $f_{ij}(t) = 1$,否则 $f_{ij}(t) = 0$ 。

$$\sum_{j=1}^T x_{ij}(t) \leq n_i, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, S\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, W\} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^W x_{ij}(t) \leq m_j, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, S\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, T\} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^T x_{ij}(t) \leq N_i, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, S\}, \quad i \in \{1, 2, \dots, W\} \quad (4)$$

$$x_{ij}(t) \leq f_{ij}(t), \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, S\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, W\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, T\} \quad (5)$$

1.4 多层弹道导弹防御体系火力分配最优化模型

根据所构建的目标函数及约束条件,多层弹道导弹防御体系火力分配最优化模型如下:

$$\max J_t(\mathbf{X}^t)$$

$$\text{s. t.} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^T x_{ij}(t) \leq n_i, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, S\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, W\} \\ \sum_{i=1}^W x_{ij}(t) \leq m_j, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, S\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, T\} \\ \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^T x_{ij}(t) \leq N_i, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, S\}, \quad i \in \{1, 2, \dots, W\} \\ x_{ij}(t) \leq f_{ij}(t), \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, S\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, W\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, T\} \end{array} \right. \quad (6)$$

2 多层弹道导弹防御体系火力分配线性规划模型

由式(6)可以看出,多层弹道导弹火力分配问题属于约束最优化问题,对于该类问题的求解算法主要有:经典算法、构造算法、基于系统动态演化算法、混合算法。经典算法计算复杂性一般很大、构造算法优化质量差、基于系统动态演化算法实时性差。针对火力分配问题,遗传算法,粒子群算法,微分进化算法等启发式算法研究比较广泛,然而这些启发式算法的缺点是实时性差,且获得是满意解不是最优解。对于反导作战而言,时间是至关重要的,因此实时性差的算法不适合于反导火力分配。针对以上问题,本文提出了线性化的方

法,通过对多层弹道导弹防御体系火力分配模型进行线性化处理,转换为多层弹道导弹防御体系火力分配线性化模型,线性化模型求解方便,实时性高,满足反导作战的需求。

由于多层弹道导弹防御体系火力分配最优化模型的非线性主要是由于目标函数中包含以 $x_{ij}(h)$ 为指数的乘积项,我们采用文献[8]的方法对该模型进行线性化处理。引入约束条件(8) 和一个决策变量 a_{jk} ,那么目标函数变为式(7) 所示:

$$\max \sum_{k=1}^K w_k \prod_{i \in J_k} a_{jk} \tag{7}$$

$$a_{jk} \leq 1 - q_{jk} \left[\prod_{h=t}^S \prod_{i=1}^{W(t)} (1 - p_{ji}(h))^{x_{ij}(h)} \right], \quad \forall k, j \in J_k, t \in \{1, 2, \dots, S\} \tag{8}$$

TBM $_j$ 的打击目标是 k ,那么 a_{jk} 就是该目标 k 在受到 TBM $_j$ 打击的情况下生存概率。目标函数与约束条件(7)、(8) 仍是非线性的,因此必须目标函数核和约束条件进行线性化处理。如果仅以保卫目标为研究对象,那么目标函数可以进一步线性化。令 $a_k \in \min_{i \in J_k} \{a_{jk}\}$, 有:

$$\max \sum_{k=1}^K w_k \prod_{i \in J_k} a_{ik} = \sum_{k=1}^K w_k a_k^{|J_k|} \tag{9}$$

$$a_k \leq a_{jk} \leq 1 - q_{jk} \left[\prod_{h=t}^S \prod_{i=1}^{W(t)} (1 - p_{ji}(h))^{x_{ij}(h)} \right], \quad \forall k, j \in J_k, t \in \{1, 2, \dots, S\} \tag{10}$$

采用 a_k 代替 a_{jk} ,改变了目标函数的意义,以最大化最小权重保卫目标的生存概率。

对式(10) 两边取对数,有:

$$\ln(1 - a_k) \geq \ln(1 - a_{jk}) \geq \ln(q_{jk}) + \sum_{h=t}^S \sum_{i=1}^{W(t)} x_{ij}(h) \ln(1 - p_{ij}(h)), \quad \forall k, j \in J_k, t \in \{1, 2, \dots, S\} \tag{11}$$

设 $\ln(1 - a_k) = -b_k$, 那么有:

$$a_k^{|J_k|} = (1 - e^{-b_k})^{|J_k|} \tag{12}$$

式中: b_k 不是一个变量,其取值 $b_k \geq 0$,通过 b_k 可以对式(8) 进行近似。 $a_k^{|J_k|}$ 的变化曲线见图 1。

当 $|J_k| = 5$ 时, $a_k^{|J_k|}$ 的线性近似见图 2。在图 2 中,根据最优线性化理论,可以对图 2 中的曲线进行线性化处理。在 b_k 坐标系产生了一个变量集 Z_{ak} , 其中 a 代表对曲线的分段数量, c_{ak} 为第 a 段直线的斜率,且有 $c_{1k} \geq c_{2k} \geq c_{3k}$ 。因此最大化 $a_k^{|J_k|}$ 等同于最大化 $\sum_{a=1}^3 c_{ak} Z_{ak}$, 如果对曲线图 2 中的曲线分割成 τ 份,那么目标函数式(7) 可以写成:

$$\max \sum_{k=1}^K w_k \sum_{a=1}^{\tau} c_{ak} Z_{ak}$$

且附加约束条件:

$$\prod_{h=t}^S \prod_{i=1}^{W(t)} [(1 - p_{ij}(h))]^{x_{ij}(h)} + \sum_{a=1}^{\tau} Z_{ak} \leq -\ln(q_{jk}) \quad \forall k, j \in J_k, t \in \{1, 2, \dots, S\} \tag{13}$$

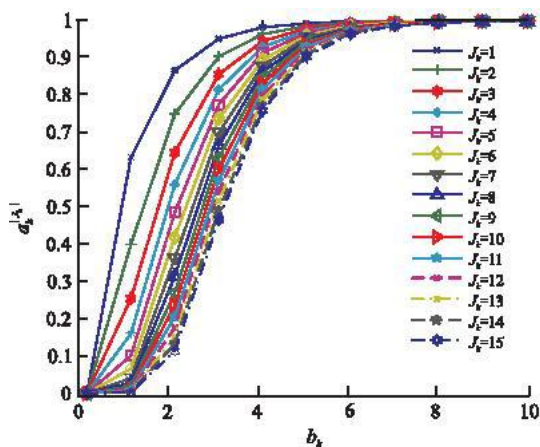


图 1 $a_k^{|J_k|}$ 与 J_k 的关系

Fig. 1 $a_k^{|J_k|}$ graphs for different values of J_k

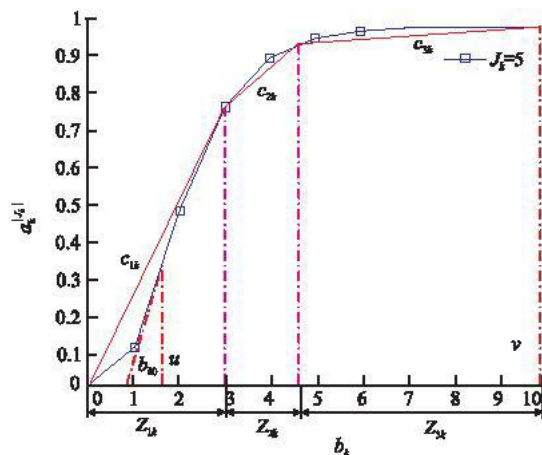


图 2 $a_k^{|J_k|}$ 与 $J_k = 5$ 的关系

Fig. 2 $a_k^{|J_k|}$ graph for $J_k = 5$

图 2 中的原 $a_k^{1J_k}$ 曲线从原点开始,不是一个凸曲线, Z_{1k} 段为凹曲线。因此在 b_k 轴上选取一点 b_{k0} ,改变曲线的起点位置,使曲线成为凸曲线,称该直线段为修正直线,见图 2。修正直线特性与 TBM 数量的对比关系见表 2。

在图 2 中,当 $u \leq b_k \leq v$,假定函数是凹函数,设 b_k 段的分割点的值为 λ_k ,那么有:

$$f(\lambda_k) = a_k^{1J_k} = (1 - e^{-\lambda_k})^{1J_k} \quad (14)$$

对式(14)进行求导有:

$$f'(\lambda_k) = |J_k| e^{-\lambda_k} (1 - e^{-\lambda_k})^{1J_k-1}$$

取 $u \leq b_k \leq v$ 段曲线的直线斜率有:

$$a = (1 - e^{-v})^{1J_k} - (1 - e^{-u})^{1J_k} / (v - u) \quad (15)$$

最优线性逼近理论有:

$$e^{-\lambda_k} (1 - e^{-\lambda_k})^{1J_k-1} = (1 - e^{-v})^{1J_k} - (1 - e^{-u})^{1J_k} / (v - u) \quad (16)$$

根据式(16),便可以求出不同曲线的近线性化的最优分割点,其中曲线 $a_k^{1J_k}$ 的 2 段和 4 段最优分割点见表 2。

表 2 修正直线和 TBM 数量对比与曲线 $a_k^{1J_k}$ 的 2 段和 4 段最优分割点

Tab. 2 Points of inflection for different number of TBM & best points for $a_k^{1J_k}$ graphs in cases of two and four segments

TBM 数量	b_{k0}	修正直线与曲线交点	修正直线斜率	2 段		4 段	
				λ_k	λ_k^1	λ_k^2	λ_k^3
1	0.000 0	(0.0,0.000 0)	0.000 0	2.772 6	1.084 3	2.772 6	5.354 9
2	0.193 1	(0.70,0.253 4)	0.500 0	3.687 9	2.003 6	3.687 9	6.209 1
3	0.431 9	(1.10,0.296 9)	0.444 4	4.119 5	2.445 3	4.119 5	6.608 0
4	0.636 3	(1.39,0.318 0)	0.421 9	4.414 2	2.749 6	4.414 2	6.879 0
5	0.809 4	(1.61,0.327 9)	0.409 6	4.634 3	2.978 1	4.634 3	7.081 0
6	0.958 4	(1.80,0.338 2)	0.401 9	4.817 2	3.168 6	4.817 2	7.248 2
7	1.078 7	(1.95,0.345 5)	0.396 5	4.964 3	3.322 1	4.964 3	7.382 7
8	1.204 4	(2.08,0.343 8)	0.392 7	5.090 9	3.454 4	5.090 9	7.498 1
9	1.308 3	(2.20,0.347 5)	0.399 7	5.204 8	3.573 8	5.204 8	7.601 9
10	1.402 6	(2.31,0.351 6)	0.387 4	5.307 7	3.681 7	5.307 7	7.695 4
11	1.488 8	(2.40,0.351 3)	0.385 5	5.395 3	3.773 5	5.395 3	7.775 0
12	1.568 2	(2.49,0.354 0)	0.384 0	5.479 2	3.861 8	5.479 2	7.851 2
13	4.641 9	(2.57,0.355 2)	0.382 7	5.554 7	3.941 1	5.554 7	7.919 7
14	1.710 5	(2.64,0.354 7)	0.381 6	5.622 3	4.012 1	5.622 3	7.981 0
15	1.774 7	(2.71,0.356 0)	0.380 6	5.687 6	4.080 9	5.687 6	8.040 1

在线性近似中,当设定 c_{ak} 为斜率, U_{ak} 为 τ 个分割段部分的上界,那么目标函数可以近似写为:

$$\max \sum_{k=1}^K w_k \sum_{a=1}^{\tau} c_{ak} Z_{ak} \quad (17)$$

添加附加约束式(13)。因为在线性近似过程中,当 $|I_k| \geq 2$ 时,分段近似线没有从原点开始,因此必须对约束式(13)进行修改:

$$\prod_{h=1}^S \prod_{i=1}^{W(i)} [(1 - p_{ij}(h))] x_{ij}(h) + \sum_{a=1}^{\tau} Z_{ak} \leq -(\ln(q_{jk}) + b_{k0}), \forall k, j \in J_k, t \in \{1, 2, \dots, S\} \quad (18)$$

$$0 \leq Z_{ak} \leq U_{ak} \quad \forall k, a = 1, 2, \dots, \tau \quad (19)$$

式中 b_{k0} 为近似直线段第 1 部分与横轴的交点。

最终的模型为:

$$\max \sum_{k=1}^K w_k \sum_{a=1}^{\tau} c_{ak} Z_{ak} \quad (20)$$

$$\begin{cases}
 \prod_{h=t}^S \prod_{i=1}^{W(t)} [(1 - p_{ij}(h))] x_{ij}(h) + \sum_{a=1}^{\tau} Z_{ak} \leq -(\ln(q_{jk}) + b_{k0}) \quad \forall k, j \in J_k, t \in \{1, 2, \dots, S\} & (21) \\
 \sum_{j=1}^T x_{ij}(t) \leq n_i, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, S\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, W\} & (22) \\
 \sum_{i=1}^W x_{ij}(t) \leq m_j, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, S\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, T\} & (23) \\
 \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^T x_{ij}(t) \leq N_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, W\}, t \in \{1, 2, \dots, S\} & (24) \\
 x_{ij}(t) \leq f_{ij}(t), \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, S\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, W\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, T\} & (25) \\
 0 \leq Z_{ak} \leq U_{ak}, \quad \forall k, a = 1, 2, \dots, \tau & (26)
 \end{cases}$$

3 仿真验证

假定拦截武器系统的数量为 $W=3$, 分别为 Weapon1, Weapon2, Weapon3, 拦截武器的可用拦截弹数量为 3; TBM 的数量为 $T=4$, 分别为 TBM1, TBM2, TBM3, TBM4, 采用观察 - 射击 - 观察策略, 每阶段最多采用一枚拦截弹对其进行拦截; 保卫目标资源数量为 $K=2$, 分别为 Asset1, Asset2。TBM4 的目标袭击要地为 Asset1, 摧毁概率为 0.8, 其余 TBM 的目标袭击要地为 Asset2, 摧毁概率为 0.9。Asset1 的价值为 5, Asset2 的价值为 8。表 3 描述了各武器系统对 TBM 的拦截时间窗口。假定系统的拦截准备时间为 30 s, 拦截弹对 TBM 的拦截时间为 1 min, 假定武器系统在实施拦截过程中, 选取 2 分钟为一个时间阶段。则根据武器系统对 TBM 拦截时间窗口可以设定 $f_{ij}(t)$ 变量。 $a_k^{j|k|}$ 的线性近似过程中对曲线进行 4 段逼近。

表 3 武器系统对 TBM 拦截时间窗口

Tab. 3 Intercept window of TBM and weapon

武器系统	TBM	拦截窗口开始时刻/min	拦截窗口结束时刻/min	单发杀伤概率
Weapon1	TBM1	2	4	0.85
Weapon1	TBM2	4	8	0.65
Weapon1	TBM3	0	0	0
Weapon1	TBM4	8	10	0.65
Weapon2	TBM1	0	4	0.85
Weapon2	TBM2	0	2	0.7
Weapon2	TBM3	4	6	0.6
Weapon2	TBM4	2	4	0.75
Weapon3	TBM1	0	2	0.65
Weapon3	TBM2	0	2	0.90
Weapon3	TBM3	6	8	0.85
Weapon3	TBM4	0	0	0

在 lingo9.0 上进行编程实现, 变量个数为 19 个, 内存使用量为 13 k, 求解花费显示时间为 0 s, 迭代次数为 13, 最终的分配方案为: $x_{11}(2) = 1, x_{12}(6) = 1, x_{14}(8) = 1, x_{21}(0) = 1, x_{23}(4) = 1, x_{24}(2) = 1, x_{32}(0) = 1, x_{33}(6) = 1$ 。

从仿真结果看, 本文针对多层弹道导弹防御体系火力分配问题所建立的线性规划模型, 易于处理, 便于计算, 对多层弹道导弹防御体系火力分配问题求解的速度快, 适合与实时性要求高的反导作战需求。

4 结束语

本文对多层弹道导弹防御体系火力分配问题进行了研究; 构建了多层弹道导弹防御体系火力分配的最优模型; 针对多层弹道导弹防御体系火力分配目标函数的特点, 研究了多层弹道导弹防御体系火力分配模型的线性化处理问题; 通过实例验证了基于近线性化理论的近似求解算法对于求解多层弹道导弹防御体系火

力分配的最优模型的有效性。下一步的工作是各个参数对多层弹道导弹防御体系火力分配结果影响进行分析。

参考文献:

- [1] Nunn Walter R, Glass David V. Analysis of a layered defense model[J]. Operations research, 1982, 30 (3): 597 - 599.
- [2] Menq Jau yeu, Tuan Pan chio. Military operations research: discrete Markov ballistic missile defence system modeling[J]. European journal of operational research, 2007, 78 (3): 560 - 578.
- [3] Day R H. Allocating weapons to target complexes by means of nonlinear programming[J]. Operations research, 1966, 14(6): 992 - 1013.
- [4] Przemieniecki S. Mathematical methods in defense analyses[J]. AIAA, 2000, 2(15): 143 - 46.
- [5] Larson Eric V, Kent Glenn A. . A new methodology for assessing multilayer missile defense options[R]. RAND94 - 32983, 1994.
- [6] Lee ZJ, Su S F, Lee C Y. Efficiently solving general weapon - target assignment problem by genetic algorithms with greedy eugenics[J]. IEEE transactions on systems, man and cybernetics part B, 2003, 33(1): 113 - 121.
- [7] Kwon O, Kang D, Lee K, et al. Lagrangean relaxation approach to the targeting problem[J]. Naval research logistics, 1999, 46(4): 640 - 653.
- [8] Metler W A, Preston F L. Solutions to a probability resource allocation problem[J]. Proceeding of the 28th IEEE conference on decision and control, 1989, 2(1): 606 - 611.
- [9] Karasakal O. Optimal air defense strategies for a naval task group[D]. Turkey: Middle east technical university, 2004.
- [10] Moscato P. On evolution, search, optimization, genetic algorithms and martial arts: towards memetic algorithms[R]. Caltech concurrent computation program, report 826, 1989.

(编辑:徐楠楠)

Research on Solution to the Model of Firepower Allocation of Multi - layered BMD System

TIAN Ye¹, ZHOU Xiao - guang¹, LI Wei - min¹, ZHANG Bei - bei²

(1. Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China; 2. Department of Military Affairs, Air Force Headquarters, Beijing 100843, Chinese)

Abstract: The paper studies the firepower allocation of multi - layered BMD system. Firstly, the firepower allocation of multi - layered BMD system is described. Then the total expected value of surviving assets of each stage is taken as the objective of firepower allocation model of multi - layered BMD system. Because of the difficulty in solving firepower allocation model of multi - layered BMD system, a linear approximation to the objective in firepower allocation of multi - layered BMD system is proposed. The results of simulation and of application of the method to a problem show that the linear programming model is of validity and real - time.

Key words: multi - layered BMD system; firepower allocation; linear programming