一种针对收敛性问题的改进进退法及其仿真验证

朱 丰[1]，柏又青[2]，冯有前[2]，张 群[1]，郑 芳[2]，张维强[3]
(1. 空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安 710077;2. 空军工程大学 理学院，陕西 西安 710051;3. 95947 部队，四川 成都 610081)

摘 要:进退法是最优化方法中一种常用且简单的一维单峰试探搜索算法。针对进退法的收敛性和收敛速率展开研究,在讨论了进退法的算法原理及其实施步骤的基础上,针对原算法在某些情况不收敛的问题,提出了一种改进的进退法,将原算法每次进退迭代中的转向步长变为与前一步长和迭代次数有关的函数，这样可以克服原算法不收敛的缺点。通过严格的理论推导证明了改进进退法的正确性,并利用实例仿真验证了其有效性。结果表明:进退法收敛速率不稳定,依不同初始参数而不同,改进进退法以降低收敛速率为代价而保证收敛性。

关键词:最优化理论与方法;改进进退法;收敛性;收敛速率
DOI:10. 3969/j. issn. 1009 -3516. 2010. 02. 019
中图分类号: TP274;O21　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009 -3516(2010)02 -0086 -05

由于现代化生产和科学技术的飞速发展,客观世界中的问题越来越复杂,要求越来越高,许多问题用传统的数学方法已经难以解决,因而迫切需要研究更深一步的数学理论和数学方法,最优化理论与方法是数学的一个重要分支,是指从问题的许多可能解答中选择以某种指标最好的解答[1-3]。它所研究的问题是讨论在众多的方案中,什么样的方案最优以及怎样找出最优方案。随着最优化理论与方法研究不断发展,最优化方法如今已经发展成为一门包含了广泛内容的成熟独立学科,现已广泛地应用于空间技术、军事科学、系统识别、无线通讯、光学系统、计算数学、工程设计、自动控制、资源分配、经济管理等诸多方面[4-10]。

在最优化方法中,一维搜索或线搜索(Line Search)是比较常见的一类优化搜索方法[1,9-10]。其主要思想是首先确定搜索区间,再用某种方法缩小这个区间,从而得到所需的最优解。在一维搜索方法中,试探法是其中的一类方法。其基本流程是陆续取一些试探点,逐次比较这些点的函数值,完成一维搜索的任务。本文针对一种经典的一维单峰试探搜索方法(进退法)展开研究,针对进退法在某些情况不收敛的缺点,提出了一种改进的进退法,并从理论推导和仿真实验证明了文中方法的正确性和有效性,同时得出了一些有益的结论。

1 进退法

进退法是一维搜索算法中一种简单试探搜索方法[1-3],其基本思想是从某一点出发,按一定的步长,确定函数值呈“高 - 低 - 高”的 3 点。如果一个方向不成功,就退回来,再沿相反的方向寻找。

定义 1 设 α^* 是 $\psi(\alpha)$ 的极小点,若存在闭区间 $[a,b]$,使 $\alpha^* \in [a,b]$,则称 $[a,b]$ 是 $\psi(\alpha)$ 的搜索区间。

对于连续函数 $\psi(\alpha)$,设问题为:

$$\min_{a \leqslant \alpha \leqslant b} \quad \psi(\alpha) \tag{1}$$

* 收稿日期:2009 -12 -07
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60971100;60672032);陕西省自然科学基础研究计划资助项目(2007F28;SJ08F10)
作者简介:朱 丰(1983 -),男,北京人,博士生,主要从事运筹学与雷达信号处理 . E - mail:zhufeng83@gmail. com

则令:

$$\Psi(\alpha)=\begin{cases}\psi(\alpha) & , \quad a\leqslant\alpha\leqslant b\\ +\infty & ,\text{其他}\end{cases} \tag{2}$$

显然

$$\min_{a\leqslant\alpha\leqslant b}\psi(\alpha)=\min_{\alpha\in R^1}\Psi(\alpha) \tag{3}$$

因此,不失一般性,总可以考虑$\min\limits_{\alpha\in R^1}\Psi(\alpha)$。

利用进退法搜索$\min\limits_{a\leqslant\alpha\leqslant b}\psi(\alpha)$的步骤如下:

步骤 1　选取初始点 $\alpha\in R^1$,初始步长 $h>0$,精度 $\varepsilon>0$ 及计数值 $r=0$,计算 $\varphi_1=\psi(\alpha)$;

步骤 2　计算 $\varphi_2=\psi(\alpha+h)$;

步骤 3　若 $\varphi_2<\varphi_1$(此时称为搜索成功,下一步搜索就大步前进),令 $\alpha:=\alpha+h,\varphi_1:=\varphi_2,h:=2\cdot h$,转**步骤** 2;若 $\varphi_2\geqslant\varphi_1$(此时称为搜索失败,下一步搜索就小步后退),判别 $|h|\leqslant\varepsilon$? 若 $|h|\leqslant\varepsilon$,停止迭代,$\alpha^*=\alpha$;否则令 $h:=-h/4,r:=r+1$,转**步骤** 2。

这样不断地迭代搜索,直到搜索到 α^* 为止。

事实上,进退法在一些情况下是不收敛的。下面通过一个命题来证明这种情况。

命题 1　利用进退法迭代时,存在周期性振荡不收敛现象。

证明　给定闭区间$[a,b]$为搜索区间,在任意一次(第 r 次,r 为非负整数)迭代中(不妨设为进过程),设进过程初始步长为 $A,0<A\leqslant b-a$,自变量值为 x,函数值为 y,步长为 h,则;

存在一个非负整数 i,使得 $y_i=f(x_i)$,且 $y_0\geqslant y_1\geqslant\cdots\geqslant y_i$,其中 y_i 为进过程最小值,y_{i+1} 为进过程边界,即 $y_{i+1}>y_i$;

由原进退法容易得第 k 步的步长 h_k 和第 $k+1$ 步的变量值 x_{k+1} 满足:$h_k=A\cdot 2^k,x_{k+1}=x_k+h_k,k$ 为非负整数且 $0\leqslant k\leqslant i$,则 $x_{i+1}=x_i+h_i=x_0+h_0+h_1+\cdots+h_{i-1}+h_i=x_0+(2^{i+1}-1)A$。

设在第 $r+1$ 次迭代中(退过程)自变量值为 x',函数值为 y',步长为 h';由原进退法知 $x'_0=x_{i+1},h'_0=-\frac{1}{4}\cdot h_i=-\frac{1}{4}A\cdot 2^i=-A\cdot 2^{i-2}$,存在非负整数 j,使得 $y'_j=f(x'_j)$,且 $y'_0\geqslant y'_1\geqslant y'_2\geqslant\cdots\geqslant y'_j$,其中 y'_j 为退过程最小值,y'_{j+1}为退过程边界,即 $y'_{j+1}>y'_j$;由原进退法知 $h'_l=h'_0\cdot 2^l=-A\cdot 2^{i-2}\cdot 2^l,x'_{l+1}=x'_l+h'_l,l$ 为非负整数,且 $0\leqslant l\leqslant j$;则 $x'_{j+1}=x'_j+h'_j=x'_0+h'_0+h'_1+\cdots+h'_{j-1}+h'_j=x_0+(2^{i+1}-1)A-A\cdot 2^{i-2}\cdot(2^{j+1}-1)$。

欲证:原进退法在迭代过程中出现周期性振荡现象,不收敛,只需证明:在进过程存在非负整数 s 且 $0\leqslant s\leqslant i$,使方程组:

$$\begin{cases}x_s=x'_{j+1}\\ h_s=-\frac{1}{4}h'_j\\ i+1-s=j+1\end{cases} \tag{4}$$

有解;

$$\Leftarrow\begin{cases}x_0+(2^s-1)A=x_0+(2^{i+1}-1)A-2^{i-2}A(2^{j+1}-1)\\ A\cdot 2^s=\frac{1}{4}2^j\cdot 2^{i-2}\cdot A\\ i+1-s=j+1\end{cases}\quad\Leftarrow\begin{cases}2^s=9\times 2^{i-2}-2^{j+i-1}\\ 2^s=2^{j-2}\times 2^{i-2}\\ i=j+s\end{cases}$$

方程组(4)有解,解为$\begin{pmatrix}s\\ j\\ i\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$,$K$ 为非负整数;一组特解为$\begin{cases}s=2\\ j=2\\ i=4\end{cases}$。

因为任意一次迭代都满足方程组(4),所以存在 s,j,i,使得原进退法迭代过程中出现周期性振荡现象,不收敛。

命题 1 证毕。

鉴于此,本文提出一种改进的进退法,已克服原算法在某些情况不收敛的缺点。

2 改进的进退法

将第 1 节**步骤** 3 中的 $h := -h/4$ 更改为 $h := -h/4^r$,这样可以克服原算法不收敛的缺点。

命题 2 利用改进进退法迭代时,不存在周期振荡现象,且一定收敛。

1)证明利用改进进退法迭代时,不存在周期性振荡现象。

反证法:给定闭区间$[a,b]$为搜索区间,在任意一次(第 r 次,r 为非负整数)迭代中(不妨仍设为进过程),设进过程初始步长为 A,$0<A\leqslant b-a$,自变量值为 x,函数值为 y,步长为 h,则;

存在非负整数 i,使得 $y_{r;i}=f(x_{r;i})$,且 $y_{r;0}\geqslant y_{r;1}\geqslant y_{r;2}\geqslant\cdots\geqslant y_{r;i}$,其中 $y_{r;i}$为进过程最小值,$y_{r;i+1}$为进过程边界,即 $y_{r;i+1}>y_{r;i}$;由改进进退法知:

$$h_{r;i}=A\cdot 2^i,\text{且 } x_{r;i+1}=x_{r;0}+(2^{i+1}-1)A$$

设在第 $r+1$ 次迭代中(退过程)自变量值为 x',函数值为 y',步长为 h';存在非负整数 j,使得:

$$y'_{r+1;j}=f(x'_{r+1;j}),\text{且 } y'_{r+1;0}\geqslant y'_{r+1;1}\geqslant y'_{r+1;2}\geqslant\cdots\geqslant y'_{r+1;j},$$

其中 $y'_{r+1;j}$为退过程最小值,$y'_{r+1;j+1}$为退过程边界,即 $y'_{r+1;j+1}>y'_{r+1;j}$;

由改进进退法知 $x'_{r+1;0}=x_{r;i+1}$,$h'_{r+1;0}=-\dfrac{1}{4^r}A\cdot 2^i$,且 $h'_{r+1;j}=-\dfrac{1}{4^r}A\cdot 2^i\cdot 2^j$;

则 $x'_{r+1;j+1}=x'_{r+1;j}+h'_{r+1;j}=x_0+(2^{i+1}-1)A-\dfrac{1}{4^r}A\cdot 2^i\cdot(2^{j+1}-1)$。

若假设利用改进进退法迭代时存在周期性振荡现象,则在进过程存在非负整数 s 且 $0\leqslant s\leqslant i$,使方程组:

$$\begin{cases} x_{r;s}=x'_{r+1;j+1} \\ h_{r;s}=-\dfrac{1}{4^{r+1}}h'_{r+1;j} \\ i+1-s=j+1 \end{cases} \tag{5}$$

有解;

$$\Rightarrow\begin{cases} x_0+(2^s-1)\cdot A=x_0+(2^{i+1}-1)A-\dfrac{1}{4^r}A\cdot 2^i\cdot(2^{j+1}-1) \\ A\cdot 2^s=\dfrac{1}{4^r}\cdot\dfrac{1}{4^{r+1}}2^i\cdot 2^j\cdot A \\ i+1-s=j+1 \end{cases}\Rightarrow j=-2r-1; \tag{6}$$

因为 i,j,r 均为非负整数,所以方程组(5)无解,推出矛盾,所以假设不成立,故利用改进进退法迭代时,不存在周期性振荡现象。

2)证明利用改进进退法迭代一定收敛

设在第 $r+2$ 次迭代中(又一次进过程)自变量值为 x'',函数值为 y'',步长为 h'';由改进进退法知:

$$x''_{r+2;0}=x'_{r+1;j+1},h''_{r+2;0}=h'_{r+1;j+1},$$

故在任意一次进退全过程(第 r 和 $r+1$ 次)迭代后,步长变为:

$$h''_{r+2;0}=\frac{1}{4^r}\cdot\frac{1}{4^{r+1}}\cdot A\cdot 2^i\cdot 2^j \tag{7}$$

因为在第 r 次迭代中,步长总和$\sum_{u=0}^{i}h_{r;u}$一定满足$\sum_{u=0}^{i}h_{r;u}\leqslant b-a$,所以 i 为有限值,同理可得 j 也为有限值;经过无穷多次迭代后,有:

$$\lim_{r\to\infty}h''_{r+2;0}=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4^r}\cdot\frac{1}{4^{r+1}}\cdot A\cdot 2^i\cdot 2^j=0 \tag{8}$$

因为闭区间上的连续函数一致连续,所以无穷多次迭代后,相邻两次搜索到的函数值之差的极限为 0,故改进进退法一定收敛。

命题 2 证毕。

3　实例仿真

利用原进退法与改进进退法搜索 $\Psi(\alpha)$ 最小值,$\Psi(\alpha)$ 的目标函数图见图 1。其中初始位置 $x_0=0$,终止精度为 0.5。

$$\Psi(\alpha)=\begin{cases}-\alpha+33, & 0\leqslant\alpha<33\\ \alpha-33, & 33\leqslant\alpha\leqslant 66\\ +\infty, & \text{其它}\end{cases} \tag{9}$$

利用进退法在不同初始参数设定条件下的搜索结果,见图 2(a)、图 2(b)。从图 2 中可以看出,在利用进退法搜索时,在初始搜索位置 $x_0=0$ 一定的条件下,当初始步长 $h_0=1$ 时,周期振荡不收敛,当初始步长 $h_0=20$ 时,只需经过 9 次迭代即可收敛,这不仅说明了进退法的收敛速率不稳定,依不同的初始参数而不同,而且也证明了利用进退法搜索时存在周期振荡不收敛的情况。

图 3(a) – 图 3(b) 分别是利用改进进退法在不同参数设定条件下的搜索结果。可以看出,改进进退法在不同初始参数下均收敛,这充分证明了本文方法的正确性和有效性。需要说明的是:通过比较图 3(b) 与图 2(b) 可以看出,改进进退法比原进退法的收敛速度慢,这说明了改进进退法是以降低收敛速度为代价而保证了一定收敛。因此,在工程应用中,应考虑这方面因素的影响。

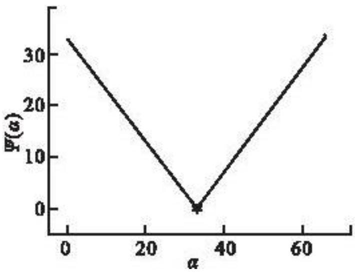

图 1　目标函数图

Fig. 1　Target function

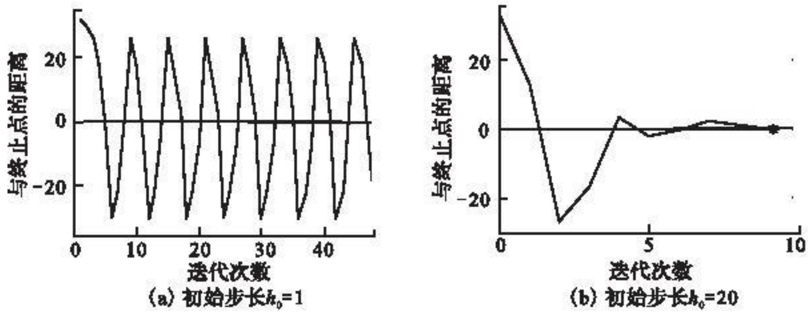

图 2　利用进退法在不同参数设定条件下的搜索结果

Fig. 2　Advance – retreat method convergent curve at different parameters

图 3　利用改进进退法在不同参数设定条件下的搜索结果

Fig. 3　Improved advance – retreat method convergent curve at different parameters

4　结论

进退法是一维搜索算法中的一种简单且常用的试探搜索方法。本文首先讨论了进退法的算法原理及实施步骤,然后提出了一种改进的进退法,可克服原算法在某些情况不收敛的缺点,并给出了严格的理论证明。最后的实例仿真不仅验证了本文方法的有效性,而且也说明了改进进退法是以降低收敛速度为代价而保证收敛性的。本文研究内容对于一维搜索算法的研究工作具有一定的意义,也为进退法在工程中更好的应用奠定了一定的基础。

参考文献:

[1] 陈开周. 最优化计算方法[M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 1984.
CHEN Kaizhou. Optimal Computational Method[M]. Xi'an:Xidian University Press,1984. (in Chinese)
[2] Roos C, Terlaky T, Vail J P. Theory and Algorithm for Linear Optimization[M]. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1997.
[3] 薛毅. 最优化原理与方法[M]. 北京:北京工业大学出版社, 2003.
XUE Yi. Optimal Theory and Method[M]. Beijing:Beijing Industry University Press,2003. (in Chinese)
[4] Gill P E, Murray W, Wright M H. Practical Optimization[M]. New York:Academic Press Inc, 1981.
[5] Srinivasan B, Palanki S, Bonvin D. Dynamic Optimization of Batch Processes I: Characterization of the Nominal solution [J]. Computers and Chemical Engineering, 2003, 27(1): 1 -26.
[6] Li Huiping, Zhao Guoqun, Niu Shanting,et al. Inverse Heat Conduction Analysis of Quenching Process Using Finite - element and Optimization Method [J]. Finite Elements in Analysis and Design,2006,42(12):1087 -1096.
[7] 杨源,梁晓龙,李炳杰. 一类开关动态系统最优控制问题的梯度下降算法[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2007,8(3):26 -28.
YANG Yuan, LIANG Xiaolong, LI Bingjie. An Armijo Stepsize Gradient - descent Algorithm for Optimal Control of Switched Dynamical Systems [J]. Journal of Air Force Engineering University:Natual Science Edition,2007,8(3):26 - 28. (in Chinese)
[8] 寇光兴,李炳杰,赵惠文. 多人微分对策 Pareto 最优解的最优均衡值算法[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2006,7(3):82 -84.
KOU Guangxing, LI Bingjie, ZHAO Huiwen. An Optimal Equilibrium Payment Algorithm for Pareto Optimal Solutions of Many - person Differential Games [J]. Journal of Air Force Engineering University:Natual Science Edition,2006,7(3):82 -84. (in Chinese)
[9] 邓云凯, 王宇, 杨贤林,等. 基于对比度最优准则的自聚焦优化算法研究[J]. 电子学报,2006,34(9):1742 -1744.
DENG Yunkai, WANG Yu, YANG Xianlin,et al. The Research of Autofocus Optimization Algorithm Based on Contrast Optimization Criterion [J]. Acta Electronica Sinica,2006,34(9):1742 -1744. (in Chinese)
[10] 樊立萍, 于海斌, 袁德成,等. SBR 污水生化处理系统的最优控制及改进[J]. 控制与决策, 2005,20(2):237 -240.
FAN Liping, YU Haibin, YUAN Decheng,et al. Improved Optimal Control of SBR Biological Wastewater Treatment Systems [J]. Control and Decision,2005,20(2):237 -240. (in Chinese)

(编辑:徐楠楠)

An Improved Advance - Retreat Method Aimed at Convergency and Simulation Proof

ZHU Feng[1], BAI You - qing[2], FENG You - qian[2], ZHANG Qun[1], ZHENG Fang[2], ZHANG Wei - qiang[3]

(1. Telecommunication Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China; 2. Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China;3. Unit 95947, Chengdu 610081,China)

Abstract:Advance - retreat method is a one - dimension searching algorithm of the optimal theory and a method for single peak function, which is very simple and in common use. The main work of this paper aims at the problem of convergence and convergent speed stated as follows. Firstly, the theory and process of advance - retreat method is discussed. Secondly, an improved advance - retreat method is proposed for conquering the drawback that the original method is not convergent at some conditions. By the improved method, the alternative step changes to a function of forehead step and iterative time. Thirdly, by a strict theoretical derivation the correctness of the method is proved. Fourthly, the effectiveness of the method is verified by simulation results. Finally, the results show that the convergence speed of the advance - retreat method is changeable with the different initial parameters and by using the improved advance - retreat method, the convergence is guaranteed at any case at the cost of decreasing the convergence speed.

Key words:optimal theory and method; improved advance - retreat method; convergence; convergence speed