第10卷第5期　　空军工程大学学报(自然科学版)　　Vol.10 No.5
2009年10月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Oct.2009

乘性/加性噪声 Markov 跳变系统线性均方最优控制*

伍友利，　方洋旺，　王洪强，　刘文杰
(空军工程大学　工程学院，陕西　西安　710038)

摘　要：针对具有乘性/加性噪声的离散时间 Markov 跳变线性系统，运用 Bellamn 随机动态规划法，对于噪声相互独立和相关两种情形推导了有限终止时间和无限终止时间的随机 LQ 最优控制算法，控制器的求解归结为求一组代数 Riccati 方程解。与不含有乘性噪声的系统相比较，此 Riccati 方程中多了包含噪声强度的项，反映了噪声对控制器的影响，从而改善了系统的性能。仿真结果与名义系统相比较，表明了本文所设计的控制器使系统具有更优的性能。

关键词：乘性/加性噪声；Markov 跳变系统；最优控制；Bellman 随机动态规划法
DOI：10.3969/j.issn.1009-3516.2009.05.007
中图分类号：TP271.74　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-3516(2009)05-0032-05

由于在实际工程问题的建模过程中发现许多系统受到随机乘性和加性噪声影响，对具有随机乘性噪声的动态系统的研究越来越受到重视。这类系统在核裂变、热传导、人口模型、资本最优组合等领域得到了广泛的应用。人们已经对这类系统的控制和滤波问题进行了较为深入的研究[1-7]，如 H_2 和 H_∞ 控制问题、鲁棒稳定性和可稳定性条件、预测控制等。

特别地，对于状态和控制都包含乘性噪声的线性系统的随机均方最优控制问题[8-13]已有较深入的研究成果。Ait Rami[14]等研究了具有乘性噪声的离散系统，在代价函数权重矩阵不定的情形下给出了随机 LQ 最优问题的适定性条件和最优控制器的一般形式。赵明旺提出了一类具有乘性噪声的系统模型，并给出了最优控制算法及 Riccati 方程的解法，但没有考虑具有 Markov 参数跳变情形，且不包含加性噪声。L.V.Costa[15]等针对一类具有乘性噪声的离散 Markov 跳变系统，研究了其最优控制问题。既包含乘性噪声又包含加性噪声的离散 Markov 跳变系统的最优控制问题的研究目前还没有见到。

本文针对一类包含有乘性和加性噪声的离散时间 Markov 线性跳变系统，在随机 LQ 最优准则下，利用随机 Bellman 动态规划法，研究其在有限时间、无限时间和噪声相关情形下的最优控制问题。

1　问题描述

考虑如下具有乘性/加性噪声的离散 Markov 跳变系统：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1}=(\boldsymbol{A}_k(r_k)+\boldsymbol{F}_k(r_k)\xi_k(r_k))\boldsymbol{x}_k+(\boldsymbol{B}_k(r_k)+\boldsymbol{G}_k(r_k)\xi_k(r_k))\boldsymbol{u}_k+\boldsymbol{L}_k(r_k)w_k(r_k) \\ \boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n,\ r_k\in S,\ k=0,1,\cdots,N-1 \end{cases} \tag{1}$$

式中：初始状态 $x_0\in\mathbf{R}^n$；控制序列 $\boldsymbol{u}(k)\in\mathbf{R}^p$ 和噪声（$\xi_k(r_k)$，$\xi_k(r_k)$，$w_k(r_k)$，$r_k\in S$，$k=0,1,\cdots,N-1$）定义在给定概率空间（$\Omega,\mathscr{F},P$）；对于每一个固定的 $r_k\in S$，$\boldsymbol{A}_k(r_k)$，$\boldsymbol{F}_k(r_k)$，$\boldsymbol{B}_k(r_k)$，$\boldsymbol{G}_k(r_k)$，$\boldsymbol{L}_k(r_k)$为具有适当维

* **收稿日期**：2008-10-11
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60674031)；国家“863”计划资助项目(2007AAXX1405)；空军工程大学工程学院优秀博士学位论文创新基金资助项目(BC06004)
作者简介：伍友利(1979-)，男，湖南常德人，博士生，主要从事结构随机跳变系统理论、导弹制导与控制、武器系统作战效能分析等研究；E-mail：wu-youl@126.com
方洋旺(1966-)，男，安徽安庆人，教授，博士生导师，主要从事导弹制导与控制、导弹作战使用、随机最优控制理论与应用、非线性控制等研究.

数的已知常值矩阵。假设对任意时刻 k,$\boldsymbol{x}_k$ 和 r_k 已知。不失一般性,假设 $\xi_k^x(r_k)$,$\xi_k^u(r_k)$为标量随机序列。噪声 $\xi_k^x(r_k)$,$\xi_k^u(r_k)$,$w_k(r_k)$与初始条件 $\boldsymbol{x}_0$,r_0 互不相关,满足:$E[\xi_k^x(r_k)]=E[\xi_k^u(r_k)]=E[w_k(r_k)]=0$,$E[\xi_k^x(r_k)^2]=\chi_k^x(r_k)$,$E[\xi_k^u(r_k)^2]=\chi_k^u(r_k)$,$E[w_k(r_k)w_k(r_k)^{\mathrm{T}}]=\chi_k^w(r_k)$,$E[w_k(r_k)\xi_k^x(r_k)]=0$,$E[w_k(r_k)\xi_k^u(r_k)]=0$,$E[\xi_k^x(r_k)\xi_k^u(r_k)]=0$。$r_k$ 为在有限集 $S=\{1,2,\cdots,s\}$中取值的离散时间、离散状态 Markov 链,其状态转移概率 $P\{r_{k+1}=j\mid r_k=i\}=q_{ij}$,式中 $q_{ij}\geqslant 0$,且对于任意的 $i\in S$,$\sum_{j=1}^{s}q_{ij}=1$。记 $p_k(i)=P(r_k=i)$。

2 乘性/加性离散 Markov 跳变系统最优控制

与确定性系统最控制类似,下面将分有限终止时间和无限终止时间讨论系统(1)的SLQ 最优控制问题。

2.1 有限终止时间情形

有限终止时间 LQ 最优控制的最优指标函数为:

$$J(r_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})=E[\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(r_N)\boldsymbol{x}_N]+\sum_{k=0}^{N-1}E[\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(r_k)\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(r_k)\boldsymbol{u}_k]\tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{Q}(r_k)(k=0,1,\cdots,N)$为非负定对称矩阵;$\boldsymbol{R}(r_k)(k=0,1,\cdots,N-1)$为正定对称矩阵。

下面求解系统(1)在 LQ 指标(2)下的最优控制问题。

定理 1 乘性/加性离散 Markov 跳变系统(1)在 LQ 指标(2)下的最优指标和最优控制律分别为:

$$J(r_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)=\sum_{i=1}^{s}\Big[p_0(i)\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_0(i)\boldsymbol{x}_0+\sum_{k=0}^{N-1}p_k(i)Tr(\boldsymbol{L}_k(i)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{L}_k(i)\chi_k^w(i))\Big]\tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}_k=-\boldsymbol{H}_k(r_k)^{-1}\boldsymbol{M}_k(r_k)\boldsymbol{x}_k\tag{4}$$

式中矩阵 $\boldsymbol{H}_k(r_k)$,$\boldsymbol{M}_k(r_k)$和 $\boldsymbol{P}_k(r_k)$满足如下 Riccati 方程:

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_k(r_k)=\boldsymbol{Q}(r_k)+\boldsymbol{A}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{A}_k(r_k)+\boldsymbol{F}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{F}_k(r_k)\chi_k^x(r_k)-\boldsymbol{M}_k(r_k)^{\mathrm{T}}H_k(r_k)^{-1}\boldsymbol{M}_k(r_k)\\ \boldsymbol{P}_N(r_N)=\boldsymbol{Q}(r_N),\boldsymbol{P}_k(r_k)>0\\ \boldsymbol{H}_k(r_k)=\boldsymbol{R}(r_k)+\boldsymbol{B}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{B}_k(r_k)+\boldsymbol{G}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{G}_k(r_k)\chi_k^u(r_k)>0\\ \boldsymbol{M}_k(r_k)=\boldsymbol{B}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{A}_k(r_k)\end{cases}\tag{5}$$

证明:采用 Bellman 动态规划法[13] 求解此问题。

定义:$k(0\leqslant k\leqslant N-1)$时刻的最优代价函数为:

$$J(r_k,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)=E\Big[\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(r_N)\boldsymbol{x}_N+\sum_{i=k}^{N-1}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(r_i)\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(r_i)\boldsymbol{u}_i\Big]\tag{6}$$

当 $k=N-1$ 时,令 $\boldsymbol{P}_N(r_N)=\boldsymbol{Q}(r_N)$,由由最优化原理及式(1)和式(6)有:

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{u}_{N-1}}(J(r_{N-1},\boldsymbol{x}_{N-1},\boldsymbol{u}_{N-1})-E[Tr(\varepsilon(\boldsymbol{P}_N)\chi_k^w(r_k))])=0\tag{7}$$

因此,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{N-1}=&-[\boldsymbol{R}(r_{N-1})+\boldsymbol{B}_{N-1}^{\mathrm{T}}(r_{N-1})\varepsilon(\boldsymbol{P}_N)\boldsymbol{B}_{N-1}(r_{N-1})+\\&\boldsymbol{G}_{N-1}^{\mathrm{T}}(r_{N-1})\varepsilon(\boldsymbol{P}_N)\boldsymbol{G}_{N-1}(r_{N-1})\chi_{N-1}^u(r_{N-1})]^{-1}[\boldsymbol{B}_{N-1}^{\mathrm{T}}(r_{N-1})\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_N)\boldsymbol{A}_{N-1}(r_{N-1})\boldsymbol{x}_{N-1}=\\&-\boldsymbol{H}_{N-1}(r_{N-1})^{-1}\boldsymbol{M}_{N-1}(r_{N-1})\boldsymbol{x}_{N-1}\end{aligned}\tag{8}$$

将式(8)代入式(7),有:

$$\begin{aligned}&J(r_{N-1},\boldsymbol{x}_{N-1},\boldsymbol{u}_{N-1})-\boldsymbol{E}[\mathrm{Tr}(\boldsymbol{L}_{N-1}(r_{N-1})^{\mathrm{T}}\varepsilon(\boldsymbol{P}_N)\boldsymbol{L}_{N-1}(r_{N-1})\chi_k^w(r_k))]=\\&\quad\boldsymbol{x}_{N-1}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Q}(r_{N-1})+\boldsymbol{A}_{N-1}(r_{N-1})^{\mathrm{T}}\varepsilon(\boldsymbol{P}_N)\boldsymbol{A}_{N-1}(r_{N-1})+\\&\quad\boldsymbol{F}_{N-1}(r_{N-1})^{\mathrm{T}}\varepsilon(\boldsymbol{P}_N)\boldsymbol{F}_{N-1}(r_{N-1})\chi_k^x(r_k)-\boldsymbol{M}_{N-1}(r_{N-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{N-1}(r_{N-1})^{-1}\boldsymbol{M}_{N-1}(r_{N-1})]\boldsymbol{x}_{N-1}=\\&\quad\boldsymbol{x}_{N-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{N-1}(r_{N-1})\boldsymbol{x}_{N-1}\end{aligned}\tag{9}$$

上式对任意的 $\boldsymbol{x}_{N-1}$,r_{N-1} 都成立,因此有:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{N-1}(r_{N-1})=&\boldsymbol{Q}(r_{N-1})+\boldsymbol{A}_{N-1}(r_{N-1})^{\mathrm{T}}\varepsilon(\boldsymbol{P}_N(r_N))\boldsymbol{A}_{N-1}(r_{N-1})+\\&\boldsymbol{F}_{N-1}(r_{N-1})^{\mathrm{T}}\varepsilon(\boldsymbol{P}_N(r_N))\boldsymbol{F}_{N-1}(r_{N-1})\chi_{N-1}^x(r_{N-1})-\boldsymbol{M}_{N-1}(r_{N-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{N-1}(r_{N-1})^{-1}\boldsymbol{M}_{N-1}(r_{N-1})\end{aligned}\tag{10}$$

对任意的 $k(0\leqslant k\leqslant N-1)$ 时刻式(6)－式(8)都成立,由数学归纳法,定理得证。

注 1:当噪声强度为零时,系统变为名义系统,此时控制退化为名义系统的最优控制,与文献[1]中的最优控制算法相同;当噪声强度不为零时,与不含乘性噪声系统的最优控制相比,Riccati 方程中多了包含噪声强度的项,这表明对噪声进行建模后所得到的最优控制律将提高系统的性能。

2.2　无限终止时间情形

考虑系统(1)的时不变情形

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1}=(\boldsymbol{A}(r_k)+\boldsymbol{F}(r_k)\xi_k^x(r_k))\boldsymbol{x}_k+(\boldsymbol{B}(r_k)+\boldsymbol{G}_k(r_k)\xi_k^u(r_k))\boldsymbol{u}_k+\boldsymbol{L}(r_k)w_k(r_k) \\ \boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n,\ r_k\in S,\ k=0,1,\cdots,\infty \end{cases}\tag{11}$$

无限终止时间 LQ 最优控制的最优指标函数为:

$$J(r_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})=\lim_{N\to\infty}\sup\frac{1}{N}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}E[\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(r_k)\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(r_k)\boldsymbol{u}_k]\right\}\tag{12}$$

式中:$\boldsymbol{Q}(r_k)$为非负定对称矩阵;$\boldsymbol{R}(r_k)$为正定对称矩阵。

注 2:对于一般的无限时间 LQR 问题,其代价函数一般定义为如下形式:

$$J(r_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})=E\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(r_k)\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(r_k)\boldsymbol{u}_k\tag{13}$$

当系统包含加性噪声 $w_k(r_k)$时,代价函数(13)可能会变为无限值,无法比较大小,从而无法求取最优代价函数,所以本文选取长时间平均代价函数(12)。

定理 2　乘性/加性离散 Markov 跳变系统(11)在 LQ 指标(12)下的最优指标和最优控制律分别为:

$$J(r_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)=\sum_{i=1}^{s}\mathrm{Tr}(p(i)\boldsymbol{L}(i)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P})\boldsymbol{L}(i)\chi^{w}(i))\tag{14}$$

$$\boldsymbol{u}_k=-\boldsymbol{H}(r_k)^{-1}\boldsymbol{M}(r_k)\boldsymbol{x}_k\tag{15}$$

式中矩阵 $\boldsymbol{H}(r_k)$,$\boldsymbol{M}(r_k)$和 $\boldsymbol{P}(r_k)$满足如下 Riccati 方程:

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}(r_k)=\boldsymbol{Q}(r_k)+\boldsymbol{A}(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_k)\boldsymbol{A}(r_k)+\boldsymbol{F}(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_k)\boldsymbol{F}(r_k)\chi^{x}(r_k)-\boldsymbol{M}(r_k)^{\mathrm{T}}H(r_k)^{-1}\boldsymbol{M}(r_k) \\ \boldsymbol{P}(r_k)>0 \\ \boldsymbol{H}(r_k)=\boldsymbol{R}(r_k)+\boldsymbol{B}(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_k)\boldsymbol{B}(r_k)+\boldsymbol{G}(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_k)\boldsymbol{G}(r_k)\chi^{u}(r_k)>0 \\ \boldsymbol{M}(r_k)=\boldsymbol{B}(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_k)\boldsymbol{A}(r_k) \end{cases}\tag{16}$$

证明:根据定理 1,由有限时间 LQ 最优控制问题的 Riccati 方程解的收敛性[13],直接可得到定理 2 的证明。

注 3:对形于式(16)的 Riccati 方程,文献[1]给出了其唯一解存在且收敛到 $\boldsymbol{P}(r_k)$的充分条件,因此对于时不变系统的最优控制问题,在进行计算时只需要记录下控制增溢$[\boldsymbol{K}(1),\boldsymbol{K}(2),\cdots,\boldsymbol{K}(s)]$,$\boldsymbol{K}(i)=-\boldsymbol{H}(i)^{-1}\boldsymbol{M}(i)$,$i=1,2,\cdots,s$。

2.3　噪声相关情形

下面讨论噪声相关时系统(1)在 LQ 指标(2)下的最优控制问题。

假设 $E[\xi_k^x(r_k)\xi_k^u(r_k)]=\chi_k^{xu}(r_k)$,$E[w_k(r_k)\xi_k^x(r_k)]=\chi_k^{xw}(r_k)$,$E[w_k(r_k)\xi_k^u(r_k)]=\chi_k^{uw}(r_k)$。

定理 3　乘性/加性离散 Markov 跳变系统(1),当 $E[\xi_k^x(r_k)\xi_k^u(r_k)]=\chi_k^{xu}(r_k)$,$E[w_k(r_k)\xi_k^x(r_k)]=\chi_k^{xw}(r_k)$,$E[w_k(r_k)\xi_k^u(r_k)]=\chi_k^{uw}(r_k)$时,在 LQ 指标(2)下的最优指标和最优控制律分别为:

$$J(r_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)=$$

$$\sum_{i=1}^{s}\left[\begin{array}{l} p_0(i)\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}P_0(i)\boldsymbol{x}_0+2\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\phi_0(i)+ \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1}(p_k(i)Tr(\boldsymbol{L}_k(i)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{L}_k(i)\chi_k^{w}(i))-\psi_k^{\mathrm{T}}(r_k)\boldsymbol{H}_k^{-1}(r_k)\psi_k(r_k)) \end{array}\right]\tag{17}$$

$$\boldsymbol{u}_k=-\boldsymbol{H}_k(r_k)^{-1}(\boldsymbol{M}_k(r_k)+\psi_k(r_k))\boldsymbol{x}_k\tag{18}$$

$$\psi_k(r_k)=\boldsymbol{G}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{L}_k(r_k)\chi_k^{uw}+\boldsymbol{B}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\phi_{k+1}(r_k)\tag{19}$$

矩阵 $\boldsymbol{H}_k(r_k)$,$\boldsymbol{M}_k(r_k)$和 $\boldsymbol{P}_k(r_k)$满足如下 Riccati 方程:

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_k(r_k) = \boldsymbol{Q}(r_k) + \boldsymbol{A}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{A}_k(r_k) + \boldsymbol{F}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{F}_k(r_k)\chi_k^x(r_k) - \boldsymbol{M}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k(r_k)^{-1}\boldsymbol{M}_k(r_k) \\ \boldsymbol{P}_N(\boldsymbol{r}_N) = \boldsymbol{Q}(r_N), \boldsymbol{P}_k(r_k) > 0 \\ \boldsymbol{H}_k(r_k) = \boldsymbol{R}(r_k) + \boldsymbol{B}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{B}_k(r_k) + \boldsymbol{G}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{G}_k(r_k)\chi_k^u(r_k) > 0 \\ \boldsymbol{M}_k(r_k) = \boldsymbol{B}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{A}_k(r_k) + \boldsymbol{G}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{F}_k(r_k)\chi_k^{xu}(r_k) \end{cases} \tag{20}$$

$\phi_k(r_k)$满足如下方程：

$$\begin{cases} \phi_k(r_k) = (\boldsymbol{A}_k(r_k)^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{M}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k(r_k)^{-1}\boldsymbol{B}_k(r_k)^{\mathrm{T}})\phi_{k+1}(r_{k+1}) + \\ \boldsymbol{F}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\varepsilon_i(\boldsymbol{P}_{k+1})\boldsymbol{L}_k(r_k)\chi_k^{xw}(r_k) - \boldsymbol{M}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k(r_k)^{-1}\boldsymbol{G}_k(r_k)^{\mathrm{T}}\chi_k^{uw}(r_k) \\ \phi_N(r_N) = 0 \end{cases} \tag{21}$$

证明：考虑到噪声的相关性，与定理 1 证明方法类似，即可得到定理 3 的证明。

注 4：文献[14]研究了不含 Markov 跳变参数系统的最优控制，可看作本文当 $s=1$ 时的特例。

3 仿真计算

对于模型(11)，考虑两模态情形：

模态 1($r(k)=1$)：

$$\boldsymbol{A}(1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}(1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{F}(1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{G}(1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{L}(1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

模态 2($r(k)=2$)：

$$\boldsymbol{A}(2)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}(2)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{F}(2)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{G}(2)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{L}(2)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

结构转移概率矩阵为：$\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$；权重矩阵为：$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$R=1$。

乘性随机噪声给定为具有零均值的正态分布随机数。在不同随机因素输入下，对上述 LQ 最优控制问题进行仿真，计算结果见表 1。

表 1 仿真计算结果

Tab. 1 Simulation result

$\chi^x=\chi^u=\chi^w=\chi$	最优指标值 J		
	乘性/加性噪声系统	乘性噪声系统	名义系统
0	0	23.218 1	23.218 1
0.1	2.704 1	29.312 9	26.797 8
0.3	24.994 1	90.613 5	895.648 7
0.5	302.838 9	701.216 5	均方不稳定

当 $\chi=0$ 即为不考虑噪声时系统(11)的 LQ 最优控制问题，此时 3 种系统的最优控制算法相同，所以乘性系统与名义系统的最优指标相同，而乘性/加性系统的最优指标由式(17)可知为 0。

从表 1 的仿真结果可知，若存在乘性随机噪声，名义系统的最优反馈控制指标下降，甚至导致闭环系统不能均方稳定，而乘性随机 Markov 跳变系统的 LQ 最优控制方法则能很好的使系统闭环稳定，并在相同指标下能够得到较名义系统最优控制更优的控制指标。乘性/加性噪声系统的最优指标随加性噪声的强度增大而增大，较乘性系统更能反映系统性能指标的变化。因此，本文所提出的方法对于具有乘性噪声的离散 Markov 跳变线性系统是一种有效的控制方法。

4 结论

本文针对一类含有乘性和加性噪声的离散 Markov 跳变线性系统，在随机均方准则下，运用随机 Bellman 动态规划法，对有限时间、无限时间和噪声相关情形，分别推导了最优控制器的结构和相应的 Riccati 方程。仿真结果表明，乘性噪声系统随机 LQ 最优控制器较名义系统的最优控制器能获得更性的系统性能指

标且能很好的保证了闭环系统稳定性,而乘性/加性噪声系统最优代价函数较乘性噪声系统更能反映系统的性能,本文所研究的控制器设计算法是一种有效的乘性 Markov 跳变系统控制方法。

参考文献:

[1] Costa O L V ,Fragoso M D ,Marques R P . Discrete Time Markov Jump Linear Systems[M]. London: Springer—Verlag, 2005.

[2] Basin M , Perez J ,Skliar M . Optimal Filtering for Polynomial System States with Polynomial Multiplicative Noise [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control ,2006, 16: 303—314.

[3] Dombrovskii V V , Dombrovskii D V ,Lyashenko E A . Predictive Control of Random—parameter Systems with Multiplicative Noise Application to Investment Portfolio Optimization[J]. Automation and Remote Control, 2005, 66: 583—595.

[4] Dombrovskii V V , Lyashenko E A . A Linear Quadratic Control for Discrete Systems with Random Parameters and Multiplicative Noise and Its Application to Investment Portfolio Optimization[J]. Automatic and Remote Control, 2003, 64: 1558—1570.

[5] Gershon E ,Shaked U . Static H2 and H∞Output—feedback of Discrete—time LTI Systems with State Multiplicative Noise[J]. Systems & Control Letters, 2006, 55: 232—239.

[6] Ait Rami M , Chen X , Moore J B ,et al . Solvability and Asymptotic Behavior of Generalized Riccati Equations Arising in Indefinite Stochastic LQ Controls[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46: 428—440.

[7] Ait Rami M , Moore J B ,Zhou X Y . Indefinite Stochastic Linear Quadratic Control and Generalized Differential Riccati Equation[J]. SIAM Journal on Control Optimization, 2001, 40: 1296—1311.

[8] Ait Rami M ,Zhou X Y . Linear Matrix Inequalities Riccati Equations and Indefinite Stochastic Linear Quadratic Controls [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45: 1131—1143.

[9] Zhu J . On Stochastic Riccati Equations for the Stochastic LQR Problem[J]. Systems & Control Letters, 2005, 54: 119—124.

[10] Beghi A ,Alessandro D . Discrete—time Optimal Control with Control—dependent Noise and Generalized Riccati Difference Equations[J]. Automatica, 1998, 34: 1031—1034.

[11] Dombrovskii V V , Dombrovskii D V ,Lyashenko E A . Predictive Control of Random—parameter Systems with Multiplicative Noise Application to Investment Portfolio Optimization[J]. Automation and Remote Control, 2005, 66(4):583—595.

[12] Li X ,Zhou X Y . Indefinite Stochastic LQ Controls with Markovian Jumps in A Finite Time Horizon[J]. Communications in Information and Systems, 2002, 2: 265—282.

[13] Moore J B , Zhou X Y ,Lim A E B . Discrete—time LQG Controls with Control Dependent Noise[J]. Systems & Control Letters, 1999, 36: 199—206.

[14] Ait Rami M , Chen X ,Zhou X Y . Discrete—time Indefinite LQ Control with State and Control Dependent Noises[J]. Journal of Global Optimization, 2002, 23: 245—265.

[15] Oswaldo L V ,Costa1 Wanderlei L , Re Paulo .Indefinite Quadratic with Linear Costs Optimal Control of Markov Jump with Multiplicative Noise Systems[J]. Automatica ,2007 ,43 :587—597.

(编辑:田新华)

Linear Quadratic Optimal Control for Discrete—Time Markov Jump System with Multiplicative and Additive Noise

WU You—li , FANG Yang—wang , WANG Hong—qiang ,LIU Wen—jie
(Engineering Institute, Air Force Engineering University , Xi′an 710038 ,China)

Abstract:The finite and infinite horizon stochastic linear quadratic optimal control algorithms for discrete—time Markov jump with multiplicative and additive noise system are presented based on Bemllman stochastic dynamic programming. And an optimal control is studied when the noises are correlated. The solution to the controller boils down to solving a set of algebra Riccati equations. The algebra Riccati equations include the noise covariance matrix which describes the effect of the noise on the controller, so the performance of the system is improved. Finally, the simulation results show that the performance of the system with the controller in this paper is better than that of the nominal system.

Key words: multiplicative and additive noise; Markov jump system; optimal control; Bemllman stochastic dynamic programming