

几何关系的目标信息分坐标处理原理

刘进忙^{1,2}, 罗红英¹, 刘建都¹

(1. 空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800; 2. 西安电子科技大学 电子工程学院, 陕西 西安 710071)

摘要: 由于传感器自身特性的限制,或在干扰的情况下,获得的目标信息有不完整的情况,为了充分利用获得不全的目标信息,提出了对目标信息进行分坐标处理的思路,给出了余切关系定理,总结和比较了其它定理和推论的应用方法,推导出许多有用的代数公式,从理论原理上得到了纯方位角、纯仰角、纯距离信息处理原理,较好地解决了方位角、仰角、距离等信息融合问题,使用这一原理方法向工程实现跨出了一大步。对比几个类似图形的几何定理及推论,归纳与总结这些代数关系,具有重要的理论意义。

关键词: 余切关系定理;目标测量坐标;几何定理;代数公式

DOI:10.3969/j.issn.1009-3516.2009.03.006

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2009)03-0027-05

在防空作战雷达网络化信息融合研究实践中,红外传感器或者2维雷达只能获得2维信息,在干扰下,3维雷达也有可能获得2维信息,这些都使得获取的目标不完全信息不能很好的使用^[1-9]。为了充分利用不全的目标信息,提出了分坐标处理原理,给出了余弦关系定理,比较类似图形的几何定理,根据分坐标原理,进一步可增加滤波,解决了目标信息不全的融合问题,较好地解决了方位角、仰角、距离等信息融合问题^[10]。

1 几种类似的几何定理及推论

1.1 余切关系定理

如图1所示,设B点把△APC的AC边内分成 l_1 、 l_2 2段,则有^[10]:

$$l_2 \cot \theta_1 - (l_1 + l_2) \cot \theta_2 + l_2 \cot \theta_3 = 0 \quad (1)$$

证明见式(5)。

1) 当 $\theta_1 = \pi - \theta'_1$, $\theta_2 = \pi - \theta'_2$, $\theta_3 = \pi - \theta'_3$ 对 $\theta'_2, \theta'_2, \theta'_3$, (1)式仍成立。

2) 当 $l_1 = l_2$, 则有:

$$\cot \theta_1 - 2 \cot \theta_2 + \cot \theta_3 = 0 \quad (2)$$

3) 当PB是∠APC的平分线,由角平分线定理有:

$$\theta_1 + \theta_3 = 2\theta_2, \text{ 或 } \frac{l_1}{l_2} = \frac{r_1}{r_3} \quad (3)$$

则有:

$$r_2 \cot \theta_1 - (r_1 + r_2) \cot \theta_2 + r_1 \cot \theta_3 = 0 \quad (4)$$

4) 测高公式为:

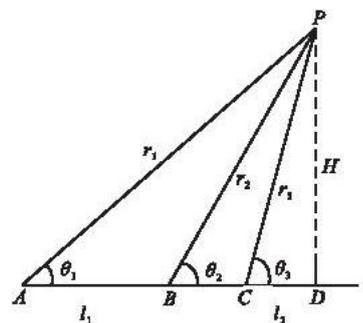


图1 三角关系图

Fig.1 Triangular relationship

* 收稿日期:2008-07-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60677040)

作者简介:刘进忙(1958-),男,陕西渭南人,教授,博士生导师,主要从事信息融合、雷达网信息处理等研究。

E-mail:liuginmang1@163.com

$$H = \frac{l_1}{\cot\theta_1 - \cot\theta_2} = \frac{l_2}{\cot\theta_2 - \cot\theta_3} = \frac{l_1 + l_2}{\cot\theta_1 - \cot\theta_3} \quad (5)$$

1.2 斯特瓦尔特(D. Stewart)定理

如图 1 所示,则有:

$$l_2 r_1^2 - (l_1 + l_2) r_2^2 + l_1 r_3^2 = l_1 l_2 (l_1 + l_2) \quad (6)$$

1) 当 $l_1 = l_2 = l$, 则有巴布斯(Pappus)定理:

$$r_1^2 - 2r_2^2 + r_3^2 = 2l^2 \quad (7)$$

2) 当 PB 是 $\angle APC$ 的平分线, $l_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_3}(l_1 + l_2)$, $l_2 = \frac{r_3}{r_1 + r_3}(l_1 + l_2)$, 则有:

$$r_1 r_3 - r_2^2 = l_1 l_2 \quad (8)$$

3) 测高公式($l_1 = l_2 = l$)为:

$$H = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\frac{(r_1^2 + 4r_2^2 + r_3^2)^2 - 2(r_1^4 + 16r_2^4 + r_3^4)}{r_1^2 - 2r_2^2 + r_3^2}} \quad (9)$$

1.3 张角定理

如图 1 所示, 设 $\angle APB = \beta_1$, $\angle BPC = \beta_2$, 利用面积公式, 可证明:

$$\frac{\sin\beta_1}{r_3} + \frac{\sin\beta_2}{r_1} = \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2)}{r_2} \quad (10)$$

1) 当 $l_1 = l_2 = l$, 则有中线(r_2)关系:

$$r_2 = \frac{r_1^2 - r_3^2}{2(r_1 \cos\beta_1 - r_3 \cos\beta_2)} \quad (11)$$

2) 角平分线当 $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ 有:

$$\frac{2\cos\beta}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \quad (12)$$

3) 测高公式为:

$$H = \frac{r_1 r_3 \sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sqrt{r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos(\beta_1 + \beta_2)}} \quad (13)$$

1.4 三弦定理

如图 2 所示, 设 A, B, C, P 为圆上 4 点, P 点位于弧 BC 之间某点, 则有:

$$r_1 \sin\alpha_2 - r_2 \sin\alpha_3 + r_3 \sin\alpha_1 = 0 \quad (14)$$

1) 上式等价:

$$l_2 \sin\theta_1 - l_3 \sin\theta_2 + l_1 \sin\theta_3 = 0 \quad (15)$$

同理, 从左边角度 $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ 也能满足上式。根据正弦定理和圆内角关系, 不难证明。

2) 圆内接 4 边形的关系见图 2, Ptolemy 定理有关系:

$$l_3 r_2 = l_1 r_3 + l_2 r_1 \quad (16)$$

3) 比较图 1 与图 2 的 r_2 是不同长的。为比较方便起见, 记图 2 中的 r_2 为 r'_2 。一般情况下, 可由式(10)、式(14)可导出:

$$r'_2 r_2 = r_1 r_3 \frac{r_1 \sin\alpha_3 + r_3 \sin\alpha_1}{r_3 \sin\alpha_3 + r_1 \sin\alpha_1} \quad (17)$$

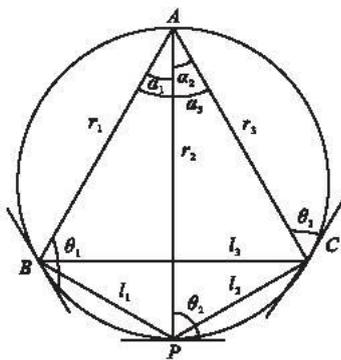


图 2 圆上三角关系图

fig. 2 Triangular relationship on circle

2 几何关系定理的应用

2.1 单站观测中信息跟踪原理

2.1.1 纯方位目标信息的跟踪原理

目标航迹水平面投影图,见图3。设 P 点为传感器的位置,目标沿直线运动, A 、 B 、 C 、 D 等点分别为时间 t_1, t_2, t_3, t_4 时的目标位置点, β_i 为对应时刻目标位置的方位值。

若目标做匀速直线运动,且等时间间隔采样,目标的运动距离应该相同,即 $l_1 = l_2 = l_3 = \dots$,由余切关系可推导出:

$$\cot(\alpha_0 - \beta_1) + \cot(\alpha_0 - \beta_3) = 2\cot(\alpha_0 - \beta_2) \tag{18}$$

可解出目标运动直线的斜率 $\cot\alpha_0$,并预测下一时刻目标的 $\cot\beta_4$,进一步对目标跟踪。

若目标做匀加速直线运动,且等时间间隔采样,目标的运动距离应该满足: $l_2 - l_1 = l_3 - l_2 = l_4 - l_3$,由余切关系可推导出:

$$\cot(\alpha_0 - \beta_1) - 3\cot(\alpha_0 - \beta_2) + 3\cot(\alpha_0 - \beta_3) - \cot(\alpha_0 - \beta_4) = 0 \tag{19}$$

可解出目标运动直线的斜率 $\cot\alpha_0$,并预测下一时刻 $\cot\beta_5$,进一步对目标进行跟踪。

2.1.2 纯距离目标信息的跟踪原理

设 P 点为传感器的位置,目标沿空间直线运动,在时间分别为 t_1, t_2, \dots 的目标位置点,测量到目标位置的距离值为 r_i 。

若目标做匀速直线运动,且等时间间隔采样,目标的运动空间距离应该相同,即 $l'_1 = l'_2 = l'_3 = \dots$,纯距离关系可应用 Pappus 定理求出,有:

$$r_1^2 - 3r_2^2 + 3r_3^2 - r_4^2 = 0 \tag{20}$$

根据 t_1, t_2, t_3 时刻的距离值估计 t_4 时刻的距离值,或预测 t_4 时刻目标的距离值,可进一步对目标距离信息滤波和跟踪。

若目标做匀加速直线运动,且等时间间隔采样,目标的运动距离应该满足: $l'_2 - l'_1 = l'_3 - l'_2 = l'_4 - l'_3$,纯距离关系可应用 D. Shewart 定理求出有:

$$r_1^2 - 5r_2^2 + 10r_3^2 - 10r_4^2 + 5r_5^2 - r_6^2 = 0 \tag{21}$$

可根据前几个时刻的距离值估计下时刻的距离值,或预测下时刻目标的距离值,可进一步处理。

2.1.3 目标等高飞行纯仰角信息的跟踪原理

见图4,若目标匀速直线等高(H 为目标的飞行高度)运动,且等时间间隔测量目标仰角信息,纯仰角关系可应用式(21)的投影关系推出:

$$\cot^2 \varepsilon_1 - 3\cot^2 \varepsilon_2 + 3\cot^2 \varepsilon_3 - \cot^2 \varepsilon_4 = 0 \tag{22}$$

式中 ε_i 为理想情况下的测量值。可根据 t_1, t_2, t_3 时刻的仰角值估计 t_4 时刻的仰角值,或预测 t_4 时刻目标的仰角值,可进一步对目标仰角信息滤波和跟踪。

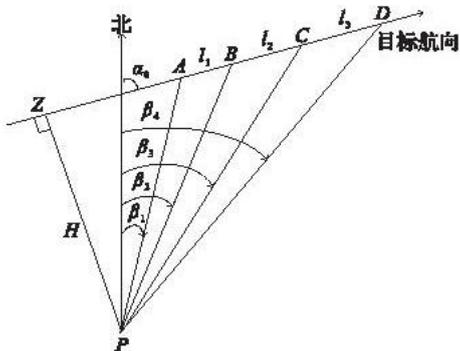


图3 目标运动水平面航迹示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the horizontal track dynamic goal

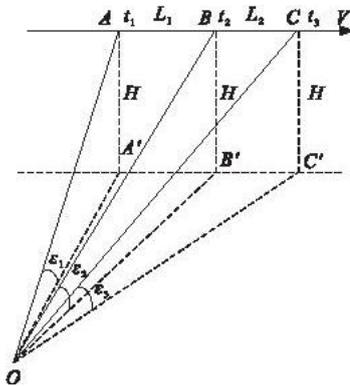


图4 雷达观测等高飞行的目标几何关系图

Fig. 4 Radar observations of high-flying goal geometric relationship

若目标匀加速直线等高(H 为目标的飞行高度)运动,且等时间间隔测量目标仰角信息,纯仰角关系可应用投影关系推出:

$$\cot^2 \varepsilon_1 - 4\cot^2 \varepsilon_2 + 6\cot^2 \varepsilon_3 - 4\cot^2 \varepsilon_4 + \cot^2 \varepsilon_5 = 0 \tag{23}$$

式中 ε_i 为理想情况下的测量值。可根据 t_1, t_2, t_3, t_4 时刻的距离值估计 t_5 时刻的距离值,或预测 t_5 时刻目标的距离值,可进一步对目标距离信息滤波和跟踪。

2.2 多站观测中信息跟踪原理

2.2.1 直线3站布站的目标信息跟踪

见图5, 设A、B、C测量站在同一水平面且在一条直线上, 各站能同步测量目标的信息为: $(r_A, \varepsilon_A, \beta_A)$ 、 $(r_B, \varepsilon_B, \beta_B)$ 、 $(r_C, \varepsilon_C, \beta_C)$, β_0 为ABC直线的方位角, 根据各测量的方位角信息应满足余切关系定理, 并设 $l_1 = l_2 = l$, 则有:

$$\cot(\beta_0 - \beta_C) - 2\cot(\beta_0 - \beta_B) + \cot(\beta_0 - \beta_A) = 0 \quad (24)$$

在三角形AP'C中, 各投影距离满足D. Shewart定理, 则有:

$$\cot^2 \varepsilon_C - 2\cot^2 \varepsilon_B + \cot^2 \varepsilon_A = \frac{2l^2}{h^2} \quad (25)$$

在三角形APC中, 各距离满足D. Shewart定理, 则有:

$$r_C^2 - 2r_B^2 + r_A^2 = 2l^2 \quad (26)$$

由于各坐标可分别处理, 其方法较灵活, 对各坐标信息可进行预测、滤波与目标跟踪, 再将分别处理后的目标信息进一步融合。

2.2.2 三角形布站的目标跟踪

见图6, 设A、B、C测量站在同一水平面布站。设边长为 $a = b = c$ 。在该平面中任意点到3站的距离分别为 r_a, r_b, r_c 且满足下式:

$$r_a^4 + r_b^4 + r_c^4 + a^4 = a^2(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) + r_b^2 r_c^2 + r_a^2 r_c^2 + r_a^2 r_b^2 \quad (27)$$

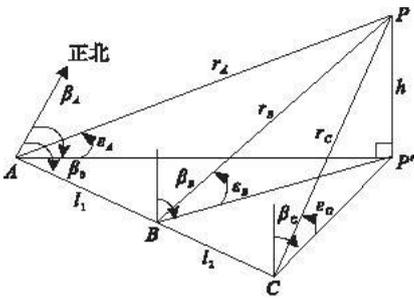


图5 直线3站同步测量目标图

Fig. 5 Simultaneous target measurement of three straight line situation

设测量站A、B、C同步观测空间目标P点(高度为h)的距离为 r'_a, r'_b, r'_c , 则

$$r_a^2 = r_a'^2 - h^2, \quad r_b^2 = r_b'^2 - h^2, \quad r_c^2 = r_c'^2 - h^2 \quad (28)$$

代入式(27)可解出h, 去掉负根; 可求出 r_a, r_b, r_c 。由A、B、C站址坐标和三角形面积公式, 可得出P的坐标。

若纯使用仰角信息:

$$r_a = h \cot \varepsilon_A, r_b = h \cot \varepsilon_B, r_c = h \cot \varepsilon_C \quad (29)$$

代入式(26)可解出h, 去掉负根; 可求出 r_a, r_b, r_c 。同理可得出P的坐标。

若使用方位信息则有:

$$\sin \angle PAB \sin \angle PBC \sin \angle PCA = \sin \angle PAC \sin \angle PBA \sin \angle PCB \quad (30)$$

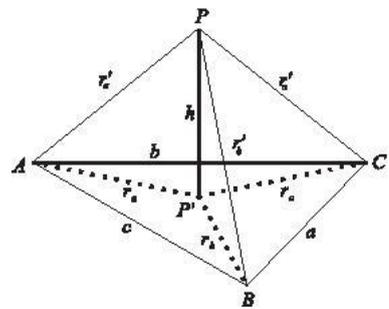


图6 三角形布站的目标距离信息图

Fig. 6 Target distance information of triangle situation

3 结束语

本文提出了对目标信息进行分坐标处理的思路, 给出了余切关系定理, 总结和比较了其它定理和推论的应用方法, 推导出许多有用的代数公式, 从理论原理上得到了纯方位角、纯仰角、纯距离等信息处理原理, 使这一原理方法向信息融合问题的工程实现跨出了一大步。如果这一原理进一步结合噪声抑制方法, 可使工程处理问题得到很强的实用性, 这部分原理已经在有关科研项目中取得了很好的应用。

参考文献:

[1] 朱德祥. 初等几何研究[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

- ZHU Dexiang. Research on Elementary Geometry[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002. (in Chinese)
- [2] 董志荣. 纯方位系统 TMA 非线性最小二乘法——工程数学模型与算法[J]. 情报指挥控制系统与仿真技术, 2005, 27(2): 4-7.
- DONG Zhirong. Nonlinear Least - square Algorithms Used for TMA in Bearing - only System - the Engineering Mathematic Model and Algorithm [J]. Information Command Control System & Simulation, 2005, 27(2): 4-7. (in Chinese)
- [3] 刘 忠, 邓聚龙. 等速运动观测站纯方位系统的可观测性[J]. 火力与指挥控制, 2004, 29(6): 51-54.
- LIU Zhong, DENG Julong. Obserbability Analysis for Single Bearings - only Observer Traveling with Constant Velocity [J]. Fire Control and Command Control, 2004, 29(6): 51-54. (in Chinese)
- [4] Bonneton F, Jauffret C. Bearing Line Tracking and Bearing - only Target Motion Analysis[C]//Aerospace Conference. Montan-a: IEEE, 2007: 1-9.
- [5] Beard J K. An Efficient Reliable Approach for Hydro Acoustical Bearings - only Observer Target Motion Analysis[C]//The 23rd IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas: IEEE, 1984: 1251-1256.
- [6] Torrieri D J. Statistical Theory of Passive Location System [J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1984, 20(2): 183-198.
- [7] Blanc - Benon P, Jauffret C. TMA from Bearings and Multipath Time Delays [J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1997, 33(3): 813-824.
- [8] Ho K C, Chan Y T. An Asymptotically Unbiased Estimator for Bearings - only and Doppler - bearing Target Motion Analysis [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2006, 54(3): 809-822.
- [9] Aidala V, Hammel S. Utilization of Modified Polar Coordinates for Bearings - only Tracking [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1983, 28(3): 283-294.
- [10] 刘进忙. 纯方位观测的航迹不变量目标跟踪算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2008, 35(1): 49-53.
- LIU Jinmang. Trajectory Invariable - information Target Tracking Algorithm with Bearing - only Measurement [J]. Journal of Xidian University, 2008, 35(1): 49-53. (in Chinese).

(编辑: 田新华)

Research on a Method of the Coordinates Fusion Based on the Geometry Relation

LIU Jin - mang^{1,2}, LUO Hong - ying¹, LIU Jian - du¹

(1. Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China; 2. School of Electronics Engineering, Xidian University, Xi'an 710077, China)

Abstract: Because of sensor own characteristic limit, or in interference situation, the target information obtained is incomplete, in order to take full advantage of those incomplete information, an idea of target coordinates information - processing is presented. The cotangent relations theorem is given, and other theorems and the deduction application methods are summarized and compared, many useful algebraic formulas are inferred, pure information processing principles, are obtained, on azimuth, pure elevation angle and pure distance from the theory principle, then the target tracking problems are solved. Using this principle method means taking a great stride in realizing the information fusion project. Contrasting the geometry theorems and deductions of several similar graphs, summarizing these algebraic relations and applying both of them to the air defense information fusion are of important theoretic significance.

Key Words: cotangent relations theorem, target measure coordinate, geometry theorem, algebraic formula.