

强有效点和严有效点的等价性

朱石焕^{1,2}, 李永新³, 白路⁴

(1. 西安电子科技大学 理学院, 陕西 西安 710071; 2. 安阳师范学院 数学系, 河南 安阳 455000; 3. 平顶山学院 数学系, 河南 平顶山 467002; 4. 空军工程大学 理学院, 陕西 西安 710051)

摘要:在 hausdorff 局部凸拓扑线性空间中, 讨论集值向量优化问题两种真有效解的等价性问题。强有效性和严有效性是优化理论中 2 个重要的基本概念, 目前已得到对凸集而言这两种有效性是等价的结论。近似锥-次类凸性是比较凸性更弱的一类重要的广义凸性, 在集值映射的近似锥-次类凸性条件下, 利用凸集分离定理得到了严有效性和强有效性等价这一结论, 从而推广了严有效点集和强有效点集对凸集而言相等的结果, 所得结果丰富了优化理论的内容。

关键词:集值优化; 严有效; 强有效性; 近似锥-次类凸性

中图分类号: O221.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2008)06-0071-04

有效性理论是集值向量优化问题研究和应用的核心, 而有效点集能被某种标量优化问题的最优解所刻画是向量优化理论的基本原理。为了标量化, 学者们给出了许多种真有效性的概念。例如: Borwein 和 Zhuang 在 1993 年引进的超效性^[1], 它有良好的性质, 但是存在条件却很强。为了弱化存在条件, 傅万涛教授改进了超效性的定义^[2], 并提出了严有效性的概念。一些学者在讨论了集值向量优化问题严有效的最优性条件和连通性等问题^[3-4]。最近, 陈永红教授和傅万涛教授又引进了强有效性的概念^[5], 它是超效性和严有效性的推广, 并且可用基泛函对其标量化, 陈永红教授还证明了严有效点集和强有效点集对凸集而言相等的结论。文章将在更弱的广义凸性条件下, 证明强有效点和严有效点是等价的。

1 严有效性和强有效性在一定条件下的等价性

设 X 为一实线性空间, Y 为 hausdorff 局部凸拓扑线性空间, 假设 D 是 Y 中内部非空的闭凸点锥, Y 的拓扑对偶记为 Y^* , 用 $N(0)$ 表示 Y 中零点的邻域基。令 $F: X \rightarrow 2^Y$ 为集值映射, F 的有效域记为 $\text{dom}F$, 文中总假设 $\text{dom}F = Q \subset X$ 。

设 A 为 Y 的任意子集, 与通常的记法一致, 用 $\text{cl}A$ 、 $\text{int}A$ 、 $\text{cone}A$ 和 $\text{co}A$ 分别表示 A 的闭包、内部、生成锥和凸包。凸锥 $D \subset Y$ 的对偶锥和严格对偶锥记为

$$D^+ = \{f \in Y^* : f(d) \geq 0, \forall d \in D\}, \quad D^{+i} = \{f \in Y^* : f(d) > 0, \forall d \in D \setminus \{0\}\}$$

凸子集 $B \subset D$ 称为 D 的一个基, 如果 $0_Y \notin \text{cl}B$ 且 $D = \text{cone}B$, 设 B 为凸锥 $D \subset Y$ 的基, 记 $B^s = \{f \in Y^* : \text{存在 } t > 0, \text{使得 } f(b) \geq t, \forall b \in B\}$, $f \in B^s$ 称为基泛函。

引理 1 B^s 有下述性质:

① $B^s \neq \emptyset, B^s \subset \text{int}D^+$; ② 令 $f \in Y^*$, 则 $f \in B^s$ 当且仅当存在零的凸域 U 使得 $f(U - B) \leq 0$ 。

定义 1 设 B 为凸集 $D \subset Y$ 的一个基, M 为 Y 的一个非空子集并设 $y_0 \in M, y_0$ 称 M 关于基 B 的严有效点, 如果存在 $U \in N(0)$ 使

$$\text{cl}(\text{cone}(M - y_0)) \cap (U - B) = \emptyset \quad (1)$$

* 收稿日期: 2008-03-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69972036)

作者简介: 朱石焕(1964-), 男, 河南安阳人, 副教授, 博士生, 主要从事最优化理论与应用等方面研究。

E-mail: zhushihuan2006@126.com

M 关于基 B 的严有效点的全体记为 $FE(M, B)$, 文献[2]还指出:关于基 B 的严有效点的定义,式(1)等价于

$$\text{cone}(M - y_0) \cap (U - B) = \emptyset \quad (2)$$

而且根据需要零点的领域 U 可取为或开或闭或凸域均衡的。

定义 2 设 B 为凸锥 $D \subset Y$ 的基, M 为 Y 的一个非空子集并设 $y_0 \in M, y_0$ 称为 M 关于基 B 的强有效点, 如果对所有的 $f \in Y^*$, 存在 $U, V \in N(0)$ 使得

$$f[\text{cl}(\text{cone}(M - y_0)) \cap (U - \text{cone}(V + B))] \quad (3)$$

式(3)为有界集。 M 关于基 B 的强有效点的全体记为 $GE(M, N)$ 。在定义 2 中, U, V 可以取为凸的对称的领域, 并且 $y_0 \in GE(M, B)$ 当且仅当对任意的 $f \in Y^*$, 存在 $U, V \in N(0)$ 使得

$$f[\text{cone}(M - y_0) \cap (U - \text{cone}(V + B))] \quad (4)$$

是有界集。

注 1 设 A 为凸集, B 为 D 的有界基, 则 $GE[A, B] = FE[A, B]$ 。

引理 2 设 $F: Q \rightarrow 2^Y$, 则 $FE(F(Q), B) = FE(F(Q) + D, B)$; 设 D 有有界基, 则 $GE(F(Q), B) = GE(F(Q) + D, B)$ [6]。

定义 3 集值映射 $F: X \rightarrow 2^Y$ 在 X 上称为近似 D -次类凸的, 如果 $\text{cl}(\text{cone}(F(X) + D))$ 是凸集。

注 2 近似 D -次类凸是集值映射比较广义的一种凸性的概念, 它是集值映射 D -类凸和 D -次类凸概念的推广。

引理 3 设 $\bar{y} \in F(Q)$, 如果存在 $u \in B^s$ 使得 $u(\bar{y}) = \min\{u(y) : y \in F(Q)\}$, 则 $\bar{y} \in FE[F(Q), B]$ 。

事实上, 当 F 为近似 D -次类凸的时, 引理 3 的逆也成立, 即有:

定理 1 设 $\bar{y} \in F(Q), \bar{y} \in FE[F(Q), B]$, 如果 $F(x) - \bar{y}$ 在 Q 上是近似 D -次类的, 则存在 $u \in B^s$ 使得 $u(\bar{y}) = \min\{u(y) : y \in F(Q)\}$ 。

证明 根据引理 2, $\bar{y} \in FE[F(Q), B] = FE(F(Q) + D, B)$ 。由定义 1, 存在零的凸邻域 U 使得

$$\text{cl}(\text{cone}(F(Q) + D - \bar{y})) \cap (U - B) = \emptyset \quad (5)$$

另一方面, 因为 $F(x) - \bar{y}$ 在 Q 上是近似 D -次类凸的, 所以 $\text{cl}(\text{cone}(F(Q) + D - \bar{y}))$ 为凸集, 由凸集分离定理, 存在 $u \in Y^* \setminus \{0_{Y^*}\}$ 使得

$$u(\text{cl}(\text{cone}(F(Q) + D - \bar{y}))) \geq u(U - B) \quad (6)$$

由 $\text{cl}(\text{cone}(F(Q) + D - \bar{y}))$ 为锥以及 μ 在其上有下界可得

$$u(\text{cl}(\text{cone}(F(Q) + D - \bar{y}))) \geq 0 \quad (7)$$

由 $0 \in \text{cl}(\text{cone}(F(Q) + D - \bar{y}))$ 和式(6)可推出 $u(U - B) \leq 0$, 由引理 1, $u \in B^s$ 。又由 $0 \in D$ 和式(7)可得结论。

下面的推论 1 是定理 1 和引理 3 的直接结果。

推论 1 设 $\bar{y} \in F(Q), F(x) - \bar{y}$ 在 Q 上是近似 D -次类凸的, 则 $\bar{y} \in FE[F(Q), B]$ 的充分必要条件是存在 $u \in B^s$, 使得 $u(\bar{y}) = \min\{u(y) : y \in F(Q)\}$ 。

引理 4 [8] 设 D 有有界基 $B, \bar{y} \in F(Q), F(x) - \bar{y}$ 在 Q 上是近似 D -次类凸的, 如存在 $\mu \in B^s$ 使得 $\mu(\bar{y}) = \min\{\mu(y) : y \in F(Q)\}$, 则 $\bar{y} \in GE(F(Q), B)$ 。

引理 5 [5,9,10] 设 C_1 和 C_2 为 Y 中的 2 个凸锥, $f \in Y^*$, 则 $f \in C_1^+ - C_2^+$ 当且仅当存在一个凸的吸收子集 $U \in Y$ 和 $\alpha > 0$, 使得 $f[C_1 \cap (U - C_2)] \geq -\alpha$ 。

引理 6 设 D 有有界基 $B, F: Q \rightarrow 2^Y, \bar{y} \in GE(F(Q), B)$, 若 $F(x) - \bar{y}$ 在 Q 上是近似 D -次类凸的, 则 $\bar{y} \in FE(F(Q), B)$ 。

证明 由引理 2 和定义 1, 只需证明存在 $\bar{U} \in N$ 使得

$$\text{cl}(\text{cone}(F(Q) + D - \bar{y})) \cap (\bar{U} - B) = \emptyset \quad (8)$$

事实上, 首先由引理 1 可得 $B^s \neq \emptyset$, 假设 $\bar{f} \in B^s$, 因此存在 $t > 0$ 使得 $\bar{f}(B) \geq t$ 。其次由引理 2 可得 $\bar{y} \in GE(F(Q) + D, B)$, 根据定义 2, 存在凸的对称邻域 U' 和 V' 使得 $f[\text{cl}(\text{cone}(F(Q) + D - \bar{y})) \cap (U' - \text{cone}(V' + B))]$ 是有界集。因此存在 $\alpha > 0$ 使得

$$f[\text{cl}(\text{cone}(F(Q) + D - \bar{y})) \cap (U' - \text{cone}(V' + B))] \geq -\alpha \quad (9)$$

又因 $F(x) - \bar{y}$ 在 Q 上是近似 D -次类凸的, 故 $\text{cl}(\text{cone}(F(Q) + D - \bar{y}))$ 为凸锥。对凸锥 $\text{cl}(\text{cone}(F(Q) + D - \bar{y}))$, $\text{cone}(V' + B)$ 以及凸邻域 U' , 应用引理 5, 故存在 $\bar{g} \in (\text{cl}(\text{cone}(F(Q) + D - \bar{y})))^+$ 和 \bar{h}

$\in (\text{cone}(V' + B))^+$ 使得 $\bar{g} = \bar{f} + \bar{h}$, 并且有:

$$\bar{g}(\text{cl}[\text{cone}(F(Q) + D - \bar{y})]) \geq 0 \quad (10)$$

显然, 有 $\bar{h}(B) \geq 0$, 所以 $\bar{g}(B) = \bar{f}(B) + \bar{h}(B) \geq t$, 令 $\bar{U} = \{y \in Y: \bar{g}(y) < \frac{t}{2}\}$, 显然 $\bar{U} \in N(0)$ 且 $\bar{g}(\bar{U} - B) \leq$

$-\frac{t}{2} < 0$, 最后, 由式(10) 和可得式(8)。

推论 2 设 D 有有界基 $B, F: Q \rightarrow 2^Y, \bar{y} \in GE[F(Q), B]$, 如果 $F(x) - \bar{y}$ 在 Q 上是近似 D -次类凸的, 则存在 $u \in B^t$ 使得 $u(\bar{y}) = \min\{u(y): y \in F(Q)\}$ 。

由定理 1 和由定理 2 即可证得。

推论 3 设 D 有有界基 $B, F: Q \rightarrow 2^Y, \bar{y} \in F(Q), F(x) - \bar{y}$ 在 Q 上是近似 D -次类凸的, 则 $\bar{y} \in GE[F(Q), B]$ 的充分必要条件是存在 $u \in B^t$ 使得 $u(\bar{y}) = \min\{u(y): y \in F(Q)\}$ 。

推论 4 设 A 为近似 D -次类凸集, B 为 D 的有界基, 则 $GE[A, B] = FE[A, B]$ 。

注 3 因为凸集为近似锥-次类凸集, 反之不然, 所以推论 4 推广了文献[5]的定理 3.4。

3 结论

强有效性是优化理论中一类重要的有效性, 但因其定义比较复杂, 关于强有效性的文献所见不多。本文在更弱的一类重要的广义凸性——近似锥-次类凸性条件下, 利用凸集分离定理得到了严有效性和强有效性是等价结论, 从而推广了已有文献中严有效点集和强有效点集对凸集而言相等的结果, 这对揭示强有效性的本质和丰富优化理论有一定的价值。

参考文献:

- [1] Borwein J M, Zhuang D. Super Efficiency in Vector Optimization[J]. Trans Amer Math Soc, 1993, 338(1): 105 - 121.
- [2] 傅万涛. 赋范线性空间集合的严有效点[J]. 系统科学与数学, 1997, 17(4): 324 - 329.
FU Wantao. Strictly Efficient Points of Sets in Normed Linear Spaces[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 1997, 17(4): 324 - 329. (in Chinese)
- [3] 余国林, 刘三阳. 集值优化的严有效性和变量集值 Lagrange 映射[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2006, 44(6): 888 - 892.
YU Guolin, LIU Sanyang. Strict Efficient of Set-valued Optimization and Scalar Set-valued Lagrange Mapping[J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2006, 44(6): 888 - 892. (in Chinese)
- [4] 仇秋生. 集值映射最优化问题的严有效解集的连通性及应用[J]. 高校应用数学学报: A 辑, 1999, 14(1): 85 - 92.
QIU Qiusheng. Connectedness of the Strict Efficient Solution Sets of the Optimization Problems for A Set-valued Mapping and Applications[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese University: Series A, 1999, 14(1): 85 - 92. (in Chinese)
- [5] Cheng Y H, Fu W T. Strong Efficiency in Locally Convex Space[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 1999, 50: 373 - 384.
- [6] 徐义红, 刘三阳. 近似锥-次类凸集优化的严有效性[J]. 系统科学与数学, 2004, 24(3): 311 - 317.
XU Yihong, LIU Sanyang, On Strict Efficiency in Set-valued Optimization Problems with Nearly Cone-subconvexlikeness [J]. J Sys Sci & Math. Scis, 2004, 24(3): 311 - 317. (in Chinese)
- [7] Yang X M, Li D, Wang S Y. Nearly-subconvexlikeness in Vector Optimization with Set-valued Function[J]. Optim. Theory Appl, 2001, 110(2): 413 - 427.
- [8] 余国林, 刘三阳, 王国正. 部分生成锥内部凸-锥-凸映射和向量优化问题[J]. 空军工程大学: 自然科学版, 2006, 7(5): 88 - 90.
YU Guolin, LIU Sanyang, WANG Guozheng. Partialic-cone-convexlike Maps in Vector Optimization Problems[J]. Journal of Air Force Engineer University: Natural Science Edition, 2006, 7(5): 88 - 90. (in Chinese)
- [9] ADAN M, NOVO V. Optimality Conditions for Vector Optimization Problems with Generalized Convexity in Real Linear Spaces [J]. Optimization, 2002, 51(8): 73 - 91.
- [10] ADAN M, NOVO V. Partial and Generalized Subconvexity in Vector Optimization Problem [J]. Journal of Convex Analysis, 2001, 8(2): 583 - 594.

(编辑: 徐楠楠)

Equivalence of Strong Efficient Points and Strict Efficient Points

ZHU Shi-huan^{1,2}, LI Yong-xin³, BAI Lu⁴

(1. School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China; 2. School of Mathematical Sciences, Anyang Normal University, Anyang 455000, Henan, China; 3. Department of Mathematics, Ping Ding Shan Institute, Pingdingshan 467002, Henan, China; 4. Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: In Hausdorff local convex topological spaces, this paper deals with the equivalence problem of two kinds of proper efficiency for set-valued vector optimization. The strong efficiency and strict efficiency play the important roles in optimization theory. At present it is known that the strict efficiency is equivalent to the strong efficiency under the condition of convexity. The nearly cone-subconvexlikeness of set-value maps is a very important generalized convexity in optimization theory, this note obtained the equivalence of strict efficiency and strong efficiency under the assumption of nearly cone-subconvexlikeness, and this conclusion is the generalization of the result that the strict efficient points equal to the strong efficient points for convex set. The results obtained in this paper will enrich the optimization theory.

Key words: set-valued optimization; strict efficiency; strong efficiency; nearly cone-subconvexlikeness

(上接第70页)

[9] Cavallaro J R, Luk F T. CORDIC Arithmetic for SVD Processor[J]. Journal of Parallel and Distributed Computing, 1998, 5: 271-290.

[10] Volder J. The Cordic Trigonometric Computing Technique[J]. IRE Transaction on Electronic Computers, 1995, 8: 330-334.

(编辑:田新华)

The Implementation of High-speed parallel Algorithm of Real-valued Symmetric Matrix Eigenvalue Decomposition through FPGA

WANG Fei, WANG Jian-ye, ZHANG An-tang, ZHANG Lu-you

(Missile Institute, Air force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China)

Abstract: To meet the application need of the separation of signal subspace and noise subspace in the MUSIC algorithm, this paper presents an improved Jacobi algorithm - parallel Jacobi algorithm, and gives a method of achieving the modification of data covariance matrix eigenvalue decomposition based on the Systolic Array structure. The vectoring mode CORDIC algorithm and rotation mode CORDIC algorithm are adopted to realize the Systolic Array structure. Fixed-point operation of 16 bit is selected by system finite bit-length. The whole matrix eigenvalue decomposition consumes 24 372 basic logic elements in FPGA, the maximum system frequency is 145 MHz, and the lowest time consumption in achieving once matrix eigenvalue decomposition is 14.82. The theory analysis and experiment validation show that this method is of high precision, and fast in speed, which greatly improves the real time property and enlarges the application scope of MUSIC algorithm.

Key words: MUSIC algorithm; eigenvalue decomposition; systolic array; FPGA