

# 实对称矩阵特征值分解高速并行算法的 FPGA 实现

王 飞, 王建业, 张安堂, 张陆游  
(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

**摘 要:**针对 MUSIC(Multiple Signal Classification, 多重信号分类)算法中的信号子空间和噪声子空间分离的硬件实现实时性需要,对矩阵特征值分解的 Jacobi 算法进行了并行改进,采用脉动阵列结构在 FPGA(Field Programmable Gate Array)上高速并行实现了对数据协方差矩阵的特征值分解。采用矢量模式 CORDIC 算法和旋转模式 CORDIC 算法实现脉动阵列结构的细胞单元。系统字长选用 16 bit 定点数,采用硬件描述语言 VHDL 进行描述,在 Altera 公司的 EP2S60 中实现。整个特征值分解模块消耗 24 372 个 FPGA 中基本逻辑单元(LE),系统最高工作频率 145 MHz,完成一次特征值分解的最低耗时为 14.82  $\mu$ s。通过理论分析和实验验证,该实现方法精度高、速度快,大大提高了 MUSIC 算法的实时性,扩大了 MUSIC 算法的应用范围。

**关键词:**MUSIC 算法;特征值分解;脉动阵列;FPGA

**中图分类号:** TN402 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2008)06-0067-04

MUSIC 算法是 R. O. Schmidt 等人最早提出的, MUSIC 算法的提出开创了空间谱估计算法研究的新时代,该算法是空间谱估计的最基本算法<sup>[1-2]</sup>。目前该算法在理论上已经成熟,但 MUSIC 算法的运算非常大,针对 MUSIC 算法中的信号子空间和噪声子空间分离,需要对  $8 \times 8$  的实对称矩阵进行特征值分解,不利于硬件实现,如何把 MUSIC 算法用硬件实现应用于实际系统,是目前的一个研究热点。EVD(Eigenvalue Decomposition, 矩阵特征值分解)步骤的计算量大概占到了整个 MUSIC 方法计算量的 60%,提高该步骤的速度,将对减少 MUSIC 算法计算时间起到重要作用。

MUSIC 算法的 EVD 步骤主要是计算实对称的协方差矩阵的特征值和特征向量。目前计算对称矩阵全部特征值和特征向量一般采用正交变化法。根据所采用的分解矩阵分为 Jacobi 算法与 QR 算法<sup>[3]</sup>。Jacobi 算法所采用的分解矩阵是平面旋转矩阵,直接将协方差矩阵  $R$  化为对角矩阵;而 QR 算法采用的 Householder 矩阵,先将  $R$  化为上对角矩阵,然后再用 QR 法求对称三角矩阵的特征值。Jacobi 算法通过旋转变换和迭代易于 FPGA 并行实现,可提高系统处理的实时性。本文提出了一种改进的 Jacobi 算法——并行 Jacobi 算法,进行特征值分解,提高了算法的实时性,可应用于 MUSIC 算法的 FPGA 的硬件实现中<sup>[4]</sup>。

## 1 Jacobi 算法及并行处理思想

Jacobi 算法的基本思想是:通过对协方差矩阵  $R$  进行一系列平面旋转变换来产生一系列对称方阵  $A_k$ 。每次旋转变换,使  $A_k$  中的 2 个元素  $a_{jk}^k$  和  $a_{ij}^k$  变为零。当多次迭代后,  $A_k$  趋于一个对角阵  $D$ ,  $D$  的各主对角元素就是  $R$  的特征值。从  $A_k$  到  $A_{k+1}$  的旋转变换公式为

$$\begin{cases} A_{k+1} = T A_k T^T, & k = 0, 1, \dots \\ A_0 = R \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $T$  是个  $n \times n$  正交的平面旋转方阵。  $T$  的目的就是使  $A_k$  中的两元素  $a_{pq}^{k-1}$  和  $a_{qp}^{k-1}$  变为零,每次迭代逐次

\* 收稿日期:2008-03-19

基金项目:国家“863”计划资助项目(2006AAX01307)

作者简介:王 飞(1983-),男,四川达州人,硕士生,主要从事雷达信号处理与并行计算研究;

Email:wangfei803@hotmail.com

王建业(1962-),男,陕西耀县人,教授,主要从事雷达信号处理及片上系统设计研究。



只需要采用上对角脉动阵列取代整个脉动阵列, 脉动阵列如图 1 所示, 每个对角处理单元处理 3 个矩阵元素, 而每个非对角线单元处理 4 个矩阵元素<sup>[7-8]</sup>。

在 rot. set(x) 处理过程中, 对角处理单元首先计算旋转角度, 然后向非对角单元传递角度, 横向传递的角度为  $\theta_H$ , 纵向传递的角度为  $\theta_L$ 。在非对角单元, 先对  $\theta_H$  角度进行旋转, 然后再对  $\theta_L$  角度进行旋转。旋转角度计算和平面坐标旋转采用 CORDIC 算法实现。按照 rot. set(1) - rot. set(7) 的顺序处理一个循环周期。

坐标旋转数字计算机 (Coordinate Rotations Digital Computer, CORDIC) 由于其基本运算单元只有移位与加减法, 这就为该算法的 VLSI 实现打下了良好的基础。CORDIC 算法迭代公式如式 (10) 所示:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \delta_i y_i 2^{-i} \\ y_{i+1} = y_i + \delta_i x_i 2^{-i} \\ z_{i+1} = z_i - \delta_i \arctan(2^{-i}) \end{cases} \quad \delta_i = \pm 1 \quad (10)$$

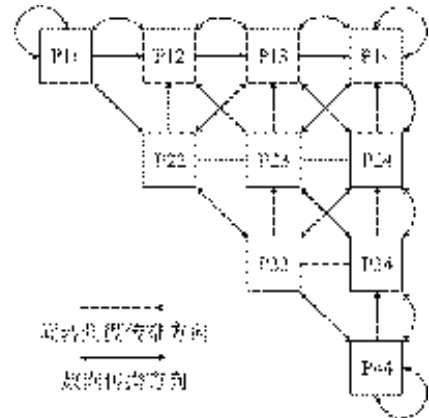


图 1 Jacobi 算法的脉动阵列图  
Fig. 1 Systolic array implementation of the Jacobi algorithm

为方便硬件实现, 令  $\theta_i$  满足  $\theta_i = \arctan(2^{-i})$  (11)

则每一级的运算就是相应输入的向量的移位相加。若要实现复数相乘, 每级迭代时还要乘上  $\cos \theta_i$ ; 若只是需要所求值的比例关系则不必考虑  $\cos \theta_i$ 。因此, 可根据实际应用的要求决定是否在最后须乘上修正因子

$$k_n = \prod_{i=0}^{N-1} \cos \theta_i = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{1+2^{-2i}}} \quad (12)$$

该算法可以工作在矢量模式和旋转模式 2 种状态, 当工作在旋转模式时, 取  $\delta_i = \text{sign}(z_i)$ , 当  $z_n \rightarrow 0$  时, 经过坐标旋转运算后的输出结果如图 2 所示。当工作在矢量模式时, 取  $\delta_i = -\text{sign}(x_i y_i)$ , 当  $y_n \rightarrow 0$  时, 经过坐标旋转运算后的输出结果如图 3 所示。当输入变量  $z_0 = 0$  时, 就可以用这种模式来计算反正切函数的值。

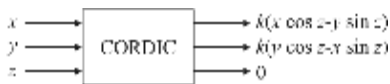


图 2 旋转模式 CORDIC 算法  
Fig. 2 Rotation mode CORDIC algorithm



图 3 矢量模式 CORDIC 算法  
Fig. 3 Vectoring mode CORDIC algorithm

对角处理单元采用 1 个 CORDIC 矢量模式和 2 个 CORDIC 旋转模式设计实现。CORDIC 矢量模式用于计算旋转角度  $\theta$  的值, 根据等式 (9), 只需在 CORDIC 矢量模式  $x$  端输入  $(a_{qq}^{k-1} - a_{pp}^{k-1})$ ,  $y$  端输入  $-a_{pq}^{k-1}$ , 令  $z$  端等于 0, 就可以得到  $2\theta$ , 最后就可以得到所需的旋转角度  $\theta$ 。采用 2 个 CORDIC 旋转模式旋转  $\theta$  角度可以分别得到

$$\begin{cases} a_{pp}^{k-1} \cos \theta + a_{pq}^{k-1} \sin \theta \\ a_{pp}^{k-1} \cos \theta - a_{pq}^{k-1} \sin \theta \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} a_{pq}^{k-1} \cos \theta + a_{qq}^{k-1} \sin \theta \\ a_{pq}^{k-1} \cos \theta - a_{qq}^{k-1} \sin \theta \end{cases}$$

然后, 再通过 CORDIC 旋转模式, 在  $x$  端输入  $a_{pp}^{k-1} \cos \theta + a_{pq}^{k-1} \sin \theta$ ,  $y$  端输入  $a_{pq}^{k-1} \cos \theta + a_{qq}^{k-1} \sin \theta$ , 令  $z$  端等于  $\theta$ , 通过平面旋转变换就可以得到式 (5)。同样, 在另一个 CORDIC 旋转模式, 平面旋转变换就可以得到式 (6), 如图 4 所示。非对角处理单元相比对角处理单元简单, 只需要从对角处理单元得到所需的旋转角度, 通过平面旋转变换得到所需的值, 采用 2 个 CORDIC 旋转模式构成。

| 对角单元        | 非对角单元       |
|-------------|-------------|
| 计算旋转角度      | 等待          |
| 旋转角度存储      | 旋转角度接收      |
| 第 1 次平面旋转变换 | 第 1 次平面旋转接收 |
| 修正因子累加求和    | 修正因子累加求和    |
| 第 2 次平面旋转变换 | 第 2 次平面旋转接收 |
| 修正因子累加求和    | 修正因子累加求和    |
| 数据交换        | 数据交换        |

图 4 处理单元处理流程  
Fig. 4 Processors operations

### 3 设计实现与结果分析

通过计算机仿真验证,得出了非对角元素收敛与字长和迭代次数关系,如图 5 所示,当迭代次数超过 4 次以后,非对角线元素的值基本没有变化。考虑到 FPGA 资源的限制,系统字长选用 16 bit 定点数,迭代次数为 4 次。

脉动阵列的各细胞单元均采用硬件描述语言 VHDL 进行描述。在源代码通过功能仿真与时序仿真测试后,在经过 Synplify8.6 软件综合生成 EDF 格式的网表文件,最后在 Altera 的 EP2S60 中实现,其中器件的布局和布线在 Altera 集成开发环境 Quartus II7.2 中完成。整个 EVD 模块使用的 FPGA 资源,最大工作频率与最小转换时间如表 2 所示。其中 LE 为 FPGA 中逻辑单元, $f_{\max}$  为最高工作频率, $t_{\min}$  一次特征值分解的最低耗时。

表 2 EVD 模块的性能

Tab. 2 The performances of EVD core

| 名称  | LE/个   | $f_{\max}$ /MHz | $t_{\min}$ /μs |
|-----|--------|-----------------|----------------|
| EVD | 24 372 | 145             | 14.82          |

### 4 结束语

本文提出了一种并行 Jacobi 算法实现的矩阵特征值分解方法,只需通过旋转变换和迭代运算,易于 FPGA 并行实现。与传统的方法相比较,采用脉动阵列结构和 CORDIC 算法实现矩阵特征值分解,不需要乘法器单元,在速度、精度和复杂度方面具有优势。能够大大提高 MUSIC 算法的实时性,使 MUSIC 算法能够在对高速目标测角上运用。实对称矩阵特征值分解在数字信号处理、视频格式转换等很多领域都有广泛的应用,提高实对称矩阵特征值分解的速度和精度,对其工程应用有重要作用。

#### 参考文献:

- [ 1 ] Zoltowski M D, Kautz G M, Silverstein S D. Beamspace Root - MUSIC[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1993, 41: 344 - 364.
- [ 2 ] Schmidt R O. Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation[J]. IEEE Trans on Antenna and Propag, 1986, 34(3): 276 - 280.
- [ 3 ] Gotze J, Paul S, Sauer M. An Efficient Jacobi - like Algorithm for Parallel Eigenvalue Computation[J]. IEEE Transactions on Computers, 1993, 42(9): 1056 - 1065.
- [ 4 ] Kim M, Ichige K, Arai H. Implementation of FPGA Based Fast DOA Estimator Using Unitary MUSIC Algorithm[C]//Proc IEEE Vehicular Technology Conference (VTC). [S. l]: [s. n], 2003: 213 - 217.
- [ 5 ] Brent R P, Luk F T. The Solution of Singular Value Problems Using Systolic Arrays[J]. Proc SPIE Real Time Signal Processing V II, 1984, 23(7): 5 - 7.
- [ 6 ] Rader C M. VLSI Systolic Arrays for Adaptive Nulling[J]. IEEE Signal Processing Mag, 1996, 13(4): 29 - 49.
- [ 7 ] Brent R P, Luk F T, Van Loan C. Computation of the Singular Value Decomposition Using Mesh - connected Processors [J]. Journal of VLSI and Computer Systems, 1985, 1(3): 242 - 270.
- [ 8 ] Ahmedsaid A, Amira A, Bouridane A. Improved SVD Systolic Array and Implementation on FPGA[J]. FPT Proceedings, 2003, 4: 35 - 42.

(下转第 74 页)

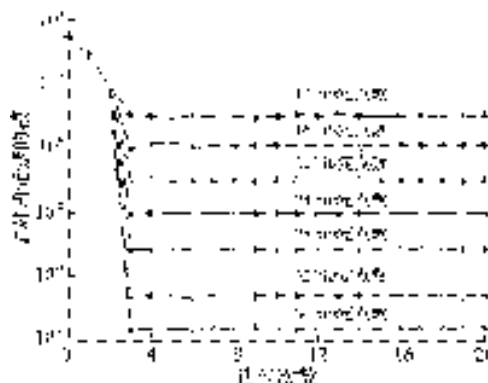


图 5 矩阵非对角元素范数减小曲线  
(8 × 8 随机对称矩阵)

Fig. 5 Reduction of off - diagonal norm  
(8 × 8 random symmetric matrix)

## Equivalence of Strong Efficient Points and Strict Efficient Points

ZHU Shi-huan<sup>1,2</sup>, LI Yong-xin<sup>3</sup>, BAI Lu<sup>4</sup>

(1. School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China; 2. School of Mathematical Sciences, Anyang Normal University, Anyang 455000, Henan, China; 3. Department of Mathematics, Ping Ding Shan Institute, Pingdingshan 467002, Henan, China; 4. Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China )

**Abstract:** In Hausdorff Local convex topological spaces, this paper deals with the equivalence problem of two kinds of proper efficiency for set-valued vector optimization. The strong efficiency and strict efficiency play the important roles in optimization theory. At present it is known that the strict efficiency is equivalent to the strong efficiency under the condition of convexity. The nearly cone-subconvexlikeness of set-value maps is a very important generalized convexity in optimization theory, this note obtained the equivalence of strict efficiency and strong efficiency under the assumption of nearly cone-subconvexlikeness, and this conclusion is the generalization of the result that the strict efficient points equal to the strong efficient points for convex set. The results obtained in this paper will enrich the optimization theory.

**Key words:** set-valued optimization; strict efficiency; strong efficiency; nearly cone-subconvexlikeness

(上接第 70 页)

[ 9 ] Cavallaro J R, Luk F T. CORDIC Arithmetic for SVD Processor[J]. Journal of Parallel and Distributed Computing, 1998, 5: 271-290.

[ 10 ] Volder J. The Cordic Trigonometric Computing Technique[J]. IRE Transaction on Electronic Computers, 1995, 8: 330-334.

(编辑:田新华)

## The Implementation of High-speed parallel Algorithm of Real-valued Symmetric Matrix Eigenvalue Decomposition through FPGA

WANG Fei, WANG Jian-ye, ZHANG An-tang, ZHANG Lu-you

( Missile Institute, Air force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China)

**Abstract:** To meet the application need of the separation of signal subspace and noise subspace in the MUSIC algorithm, this paper presents an improved Jacobi algorithm - parallel Jacobi algorithm, and gives a method of achieving the modification of data covariance matrix eigenvalue decomposition based on the Systolic Array structure. The vectoring mode CORDIC algorithm and rotation mode CORDIC algorithm are adopted to realize the Systolic Array structure. Fixed-point operation of 16 bit is selected by system finite bit-length. The whole matrix eigenvalue decomposition consumes 24 372 basic logic elements in FPGA, the maximum system frequency is 145 MHz, and the lowest time consumption in achieving once matrix eigenvalue decomposition is 14.82. The theory analysis and experiment validation show that this method is of high precision, and fast in speed, which greatly improves the real time property and enlarges the application scope of MUSIC algorithm.

**Key words:** MUSIC algorithm; eigenvalue decomposition; systolic array; FPGA