度量空间上泛函的一致连续性

成 波[1,3]， 陆陶荣[2]， 赵小鹏[1,4]
(1.西安电子科技大学 理学院，陕西 西安 710071;2.空军工程大学 理学院，陕西 西安 710051;3.安康学院 数学系，陕西 安康 725000;4.渭南师范学院 数学系，陕西 渭南 714000)

摘 要:定义了度量空间上泛函的一致连续性以及一致连续性的判定函数,研究了判定函数的性质,建立了判定函数和泛出一致连续的关系,利用判定函数给出了度量空间和次范整线性空间上泛函一致连续的一个充分必要条件,使得泛函一致连续性的判定变得简单。

关键词:度量空间;次范整线性空间;一致连续;局部有界泛函
中图分类号: O177 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2008)01-0089-03

度量空间[1]上函数的一致连续是实数域或 n 维欧氏空间上函数一致连续概念的推广,然而度量空间没有线性结构,其中不存在元素间的线性运算,因而许多用于判断实数域或 n 维欧氏空间上函数一致连续性的方法,虽然用它们能有效且简便地判断函数的一致连续性,但均不能推广用于度量空间。原因是这些方法通常包含有线性运算。那么能否在度量空间上引入线性结构,文献[2-4]给出了一种解决方案,使得度量空间具有了整线性结构。在此基础上,将一些用于判断实数域上函数一致连续性的方法推广到具有平移线性结构的度量空间上。另外,在度量空间上定义泛函的一致连续性的判断函数,也可以使得函数一致连续性的判定变得容易。

1 度量空间上的一致连续泛函

定义1 设(X,d)是非空度量空间,$\varphi:X\to\mathbf{R}$ 是 X 到实数域 $\mathbf{R}$ 上的映射(称为泛函或函数),$D\subset X$。如果对任意的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得任取 $x,y\in D$,只要 $d(x,y)<\delta$,就有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|<\varepsilon$,那么称 φ 是 D 上的一致连续泛函。

度量空间上一致连续的泛函很多,例如 $\mathbf{R}$ 是度量空间, 取 $D=[1,3]$,则$f(x)=\sin x$ 即是 D 上的一致连续函数。又如,设(X,d) 是一致离散的度量空间,$\varphi:X\to\mathbf{R}$ 是一个泛函,则容易证明 φ 是 X 上的一致连续泛函。显然, φ 是 D 上的一致连续泛函,则它一定是 D 上的连续泛函(映射), 所以讨论 φ 的一致连续性时,总是假设 φ 是连续泛函,但反之不然。

定义2 设 φ 是(X,d) 上泛函,$D\subset X$, φ 在 D 连续,则定义函数 $S_\varphi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+\cup\{+\infty\}$,$S_\varphi(r)=\sup\limits_{\substack{x,y\in D\\ d(x,y)\leqslant r}}|\varphi(x)-\varphi(y)|$,称 S_φ 为 φ 在 D 上一致连续的判定函数,简称判定函数, 其中 $\mathbf{R}^+=\{\alpha\in\mathbf{R}|\alpha\geqslant 0\}$。

定理1 设(X,d) 是非空度量空间, $D\subset X$,泛函 φ 在 D 连续, S_φ 为 φ 在 D 上的判定函数。那么 φ 在 D 上一致连续的充要条件是:$\lim\limits_{r\to 0}S_\varphi(r)=0$。

证明 必要性:如果 φ 在 D 上一致连续,由泛函一致连续的定义可知:对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $x,y\in D$ 且 $d(x,y)<\delta$ 时, 总有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|<\varepsilon$。这时,只要 $0<r<\delta$ 且 $x,y\in D,d(x,y)\leqslant r$,就有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|<\varepsilon$,于是 $S_\varphi(r)=\sup\limits_{\substack{x,y\in D\\ d(x,y)\leqslant r}}|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\varepsilon$,因此,$\lim\limits_{r\to 0}S_\varphi(r)=0$。

收稿日期:2007-04-30
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60674708);陕西省自然科学基金资助项目(2004A05)
作者简介:成 波(1971-),男,陕西安康人,博士生,主要从事函数论、最优化理论与应用研究. E-mail:tr-lu@126.com

充分性:反之,如果$\lim\limits_{r\to 0}S_{\varphi}(r)=0$,则对任意的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$0<r<\delta$时,总有$S_{\varphi}(r)<\varepsilon$。由上确界的定义可知只要$x,y\in D,d(x,y)\leqslant r$,就有$|\varphi(x)-\varphi(y)|<\varepsilon$,因此$\varphi$在$D$上一致连续。证毕。

在定理1中,泛函的一致连续判定函数S_{φ}是判定连续泛函φ为一致连续泛函的关键,在判定连续泛函的一致连续性时,只需要判定相应的判定函数在$r\to 0$的极限是否为零。在(X,d)引入线性运算后我们将推广该定理,使它成为判定连续泛函一致连续性的重要工具。

例1 (X,d)是非空度量空间,$\varphi:X\to\mathbf{R}$是实泛函,$D\subset X$。如果D是X中的紧集,φ在D上连续,那么φ是D上一致连续。

证明 反证法。若φ在D上不一致连续,则由定理1可知$\lim\limits_{r\to 0}S_{\varphi}(r)\neq 0$,又根据$S_{\varphi}$的定义,可知存在$\varepsilon_0>0$,对任意的自然数$n$,存在$x_n,y_n\in D$且$d(x_n,x_y)<1/n$,使得$|\varphi(x_n)-\varphi(y_n)|>\varepsilon_0$。由于$D$是紧集,故$\{x_n\}$存在收敛子列$\{x_{n_i}\}$,且$x_{n_i}\to x_0\in D$,但同时$|\varphi(x_{n_i})-\varphi(y_{n_i})|>\varepsilon_0$。且$\varphi$在$D$上连续,因此$\varphi(x_{n_i})\to\varphi(x_0)$,所以有$|\varphi(y_{n_i})-\varphi(x_0)|>\varepsilon_0$,由式$d(x_n,y_n)<1/n$及$x_{n_i}\to x_0\in D$可知$y_{n_i}\to x_0$,从而$\varphi(y_{n_i})\to\varphi(x_0)$,这与$|\varphi(y_{n_i})-\varphi(x_0)|>\varepsilon_0$矛盾,因此$\varphi$在$D$上一致连续。证毕。

由于$\mathbf{R}^n$上的有界闭集是紧集,所以可得如下应用非常广泛的推论1。

推论1 设f是定义在$\mathbf{R}^n$上的函数,D是$\mathbf{R}^n$的一个有界闭子集。若f在D上连续,则f在D上一致连续。

2 次范整线性空间上泛函的一致连续性

在度量空间中引入线性结构,以使一致连续[5-6]的判定函数更为简单。

定义3 设$(X,+,\theta,\|\cdot\|)$是次范整线性空间[2,4],$\varphi:X\to\mathbf{R},D\subset X$。如果对任意的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得任取$x,y\in D$,只要$\|x-y\|<\delta$,总有$|\varphi(x)-\varphi(y)|<\varepsilon$,那么称$\varphi$是$D$上的一致连续泛函。

由于在次范整线性空间中有了线性运算,所以泛函的一致连续判定函数可定义为如下形式:设φ是$(X,+,\theta,\|\cdot\|)$上泛函,$D\subset X$,φ在D连续,则定义φ在D上一致连续的判定函数为$S_{\varphi}:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+\cup(+\infty)$,$S_{\varphi}(r)=\sup\limits_{\|x-y\|\leqslant r}|\varphi(x)-\varphi(y)|$。

这时,定理1可以表述推论2。

定义4 设$(X,+,\theta,\|\cdot\|)$是次范整线性空间,$D\subset X$,泛函φ在D连续,S_{φ}为φ在D上的判定函数。那么φ在D上一致连续的充要条件是:$\lim\limits_{r\to 0}S_{\varphi}(r)=0$。

设φ是$(X,+,\theta,\|\cdot\|)$上的实泛函,若对任意的$x,y\in X,m,n\in\mathbf{Z}$,都有

$$\varphi(mx+ny)=m\varphi(x)+n\varphi(y)$$

则称φ是X上的整线性泛函。进一步,若存在$r>0$,$m\in\mathbf{Z}$使得当$\|x\|<r$时,有$\|\varphi(x)\|\leqslant m\|x\|$,则称$\varphi$是$X$上的局部有界线性泛函。

命题1 φ是$(X,+,\theta,\|\cdot\|)$上泛函。若φ是局部有界线性泛函,则φ在X上一致连续。

证明 如果φ是X上的局部有界线性泛函,那么存在$r_0>0$,$m\in\mathbf{Z}$使得当$\|x\|<r$时,有$\|\varphi(x)\|\leqslant m\|x\|$这时只要$r\leqslant r_0$,$\varphi$在$X$上的一致连续判定函数为

$$S_{\varphi}(r)=\sup_{x,y\in X}|\varphi(x)-\varphi(y)|\sup_{\substack{\|h\|\leqslant r\\ h\in X}}|\varphi(h)|\leqslant m\|h\|\leqslant mr$$

于是有$\lim\limits_{r\to 0}S_{\varphi}(r)=0$,即$\varphi$在$X$上的一致连续。证毕。

对于具有线性结构的度量空间(如线性赋范空间等),则可充分利用线性运算来判定连续泛函的一致连续性。事实上,线性赋范空间也是Frechet空间,而Frechet空间是有线性结构的度量空间,所以由定理1可得到以下2个推论。

推论2 若(X,d)是Frechet空间[7-10],$D\subset X$,泛函φ在D连续,则φ在D上一致连续的充要条件是:$\lim\limits_{r\to 0}S_{\varphi}(r)=0$。

推论3 若X是线性赋范空间,$D\subset X$,泛函φ在D连续,则φ在D上一致连续的充要条件是:$\lim\limits_{r\to 0}S_{\varphi}(r)=0$。

对于一元函数,可以用更简洁的推论4来判定其一致连续性。

推论4 设f是区间$I\subset\mathbf{R}$上的函数,那么f在区间I上一致连续的充分必要条件是:存在$r>0$及定义在

$(0,r)$ 上满足 $\lim\limits_{h\to 0+} g(h)=0$ 的函数 g ,使得对任意的 $h\in[0,r]$ 和 $x\in I$,只要 $x+h\in I$,就有 $|f(x+h)-f(x)|\leqslant|g(h)|$。

证明 对于一元函数,一致连续判定函数为

$$S_f(r)=\sup_{\substack{x,x+h\in I\\ \|h\|\leqslant r}}|f(x)-f(x+h)|=\sup_{\substack{x,x+h\in I\\ 0<h\leqslant r}}|f(x)-f(x+h)|$$

这时,如果存在 $r>0$ 及定义在 $(0,r)$ 上满足 $\lim\limits_{h\to 0+} g(h)=0$ 的函数 g ,使得对任意的 $h\in[0,r]$ 和 $x\in I$,只要 $x+h\in I$,就有 $|f(x+h)-f(x)|\leqslant|g(h)|$,那么 $S_f(r)\leqslant g(h)$,又 g 满足 $\lim\limits_{h\to 0+} g(h)=0$,所以有 $\lim\limits_{r\to 0} S_f(r)=0$。

反之,若 $\lim\limits_{r\to 0} S_f(r)=0$,则只需取 $g(h)=S_f(h)$,这时结论成立。证毕。

事实上,由定理 1 不但能判定泛函是一致连续的,而且还能判定泛函的不一致连续性。

参考文献:

[1] 朱林户,杨亚莉,罗秀琴. 一个随机的定序原理[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2005,6(1):19-21.
ZHU Linhu, YANG Yali, LUO Xiuqin. A Random Ordering Principle[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2005, 6(1):19-21. (in Chinese)

[2] 王国俊,白永成. 平移空间的线性结构[J]. 数学学报,2005,48(1):1-10.
WANG Guojun, BAI Yongcheng. Linear Structure on Translation Spaces[J]. Acta Mathematica Sinica, 2005, 48(1):1-10. (in Chinese)

[3] 成 波,曹怀信, 次范整线性空间中的逆算子定理和闭图像定理[J]. 西南师范大学学报,2006,31(4): 35-39.
CHENG Bo, CAO Huaixin. Inverse Operator Theorem and Closed Theorem in Sub-Normed Z-linear Space[J]. Journal of Southwest China Normal University, 2006, 31(4):35-39. (in Chinese)

[4] Wang G J, Wang W. Generalization of the Scheefers Theorem[J], Indian J. Math., 1999, 41(3):407-414.

[5] Walter Rudin,泛函分析[M]. 北京:机械工业出版社,2004.
Walter R. Functional Analysis[M]. Beijing: China Machine Press, 2004. (in Chinese)

[6] John B C. A Course in Functional Analysis[M]. New York: Springer-Verlag, 1985.

[7] Fzquerro J A, Hernandez M A. Relaxing Convergence Conditions for an Inverse-free Jarratt-type Approximation[J]. J Comput Appl Math, 1997, 83(1):131-135.

[8] Argyros I K, Chen D, Qian Q S. The Jarratt Method in Bananch Space Setting[J]. J Comput Appl Math, 1994, 51(1):103-106.

[9] Wang C S, Huang Z Y, Wang X J. Analytic Characterization for Hilbert-Schmidt Operators on Fock Space[J]. Acta Mathematica Sinica, 2005, 21(4):787-796.

[10] Li L Q, Lu R. An Improved Nonlinear Closed Graph Theorem[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese University, 2007, 22(2):226-228.

(编辑:田新华,徐楠楠)

Uniform Continuity of Functional on Metric Space

CHENG Bo[1,3], LU Tao-rong[2], ZHAO Xiao-peng[1,4]

(1. School of Science, Xidian University Xi'an, 710071, China; 2. The Schience Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China; 3. Department of Mathematics, Ankang University, Ankang 725000, Shaanxi, China; 4. Department of mathematic, Weinan Teachers College, Weinan 714000, Shaanxi, China)

Abstract: In this paper, we introduce the uniform continuity of functional on a metric space and the test function of a uniform continuity. The character of test function and the relation between the test function and the uniform continuity is studied. Using the test function, we obtain a necessary and sufficient condition of determining the uniform continuity of functional on a metric space or a sub-normed Z-linear space. In this case, it is simple to determine the uniform continuity of functional.

Key words: metric space; sub-normed Z-linear space; functional; uniform continuity; local bounded function; Frechet space