基于概率的兵力部署模型

任继业[1,2]，　陈　明[1]，　张小水[3]
(1. 西北工业大学 自动化学院，陕西 西安 710072;2. 空军工程大学 导弹学院，陕西 三原 713800;3. 空军工程大学 理学院，陕西 西安 710051)

摘　要:在基于概率度量的兵力部署理论的基础上,通过分析认识兵力部署问题,基于兵力部署问题的描述研究给出了兵力部署中随机事件的表示及概率型兵力部署的数学模型,并探讨了模型中系数的确定问题,给出了一些有待进一步研究和思考的问题。

关键词:概率;兵力部署;模型
中图分类号: O221　**文献标识码**:A　**文章编号**:1009-3516(2007)05-0045-03

兵力部署问题无论在战争、战役还是战术方面都是不可避免的军事活动。由于战争环境的复杂化,战争技术的现代化,战争形态的改变等,使我们必须不断深入研究兵力部署模型,以适应现代化作战需要。

1　问题及其描述

军事运筹学中经常碰到的兵力优化部署问题实际上是一种指派问题,其模型被表述为0-1规划[1-2],即

$$
\begin{gathered}
\max \quad P(S)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1, \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \\
x_{ij}=0,1;(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)
\end{gathered} \tag{1}
$$

式中0-1变量 x_{ij} 的定义为 $x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当} A_i \text{部署于} B_j \text{时} \\ 0, & \text{当} A_i \text{部署于} B_j \text{时}\end{cases}$。

虽然可以利用运筹学中的对应方法(如:匈牙利法等)求解该问题而得到兵力部署问题的解(实际上是一个0-1矩阵)来指导军事行动的决策,其实,模型(1)是以一种特殊的确定性假定前提下来认识研究问题的。在实际运用中,战争的发生甚至兵力的部署过程中充满着随机性机制和因素。特别地,这样的模型适宜用于战略兵力部署[3,4]。

一般地,防空战略兵力部署问题可以描述为[1]:若将防空力量按一定的有机合成方式构成 m 个可以独立作战的作战集团:$A_1, A_2, \cdots, A_m$,可能产生战争的重点防区(假设相互独立)为 n 个:$B_1, B_2, \cdots, B_n$,在某一个指定的时期,B_j 防区发生战争(有战情)的概率为 p_j,当 A_i 布防于 B_j 时能挫败敌方攻击的概率为 p_{ij}。问:从全局上讲,如何布防,方可以使我们以最大的可能性(概率)挫败敌方的攻击?

事件表示:S 表示挫败敌方攻击,取得防空作战胜利;B_j 表示防区 B_j 发生战争(有战情);A_{ij} 表示 A_i 布防于 B_j; $A_{ij}B_j$ 表示防区 B_j 发生战争且 A_i 部署在 B_j 执行防空作战任务。那么,

$$P(B_j)=p_j \quad , \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

收稿日期:2007-03-30
作者简介:任继业(1956-),男,河北蔚县人,博士生,主要从事武器装备管理及维修决策技术研究;
陈　明(1939-),男,江苏南京人,教授,博士生导师,主要从事智能控制技术、装备管理决策及其过程控制技术研究.

$$P(S \mid A_{ij}B_j) = p_{ij} \quad , \quad (j = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

从而,当防区 B_j 有战情时,可以战胜敌空中攻击取得防空作战胜利的概率为

$$P(S \mid B_j) = \sum_{i=1}^{m} P(A_{ij}B_j)P(S \mid A_{ij}B_j) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}P(A_{ij}B_j),(j = 1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

从全局上讲,我们挫败敌方攻击的概率为

$$P(S) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(S \mid B_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\sum_{i=1}^{m} p_{ij}P(A_{ij}B_j) \tag{5}$$

2 概率型兵力部署模型

通过前面的分析可知,我们所考虑的问题是:如何合理部署兵力,即获取合理的 $P(A_{ij},B_j)$,$(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$,使得 $P(S)$ 最大化。这就是说

$$\max P(S) = \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{m} p_{ij}P(A_{ij}B_j)$$

$$\text{s. t.} \sum_{i=1}^{m} P(A_{ij}B_j) = 1,0 \leqslant P(A_{ij}B_j) \leqslant 1,i = 1,2,\cdots,m,j = 1,2,\cdots,n \tag{6}$$

这是在目标指导下寻求合理的(概率)分布问题。这里的概率 $P(A_{ij}B_j)$ 是一个综合信息的表征,表示着将 A_i 部署在 B_j 的可能性大小,蕴涵着有关的距离特征、可用性、机动性等等因素[5]。对此模型,可以抽象化为如下的优化问题:

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s. t.} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1,i = 1,2,\cdots,m,j = 1,2,\cdots,n \tag{7}$$

求解该问题就可得到一组决策变量 $x_{ij}(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$,并由此决策变量来指导兵力部署。

3 模型系数的确定

模型(7)中的系数 a_{ij} 即上述模型(6)中的概率 $P(B_j) = p_j,(j = 1,2,\cdots,n)$,$P(S \mid A_{ij}B_j) = p_{ij},(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$ 是进行优化部署的基础和前提。在此,我们仅就 $P(B_j) = p_j$ 进行探讨。

其实,事件 B_j(防区 B_j 发生战争)和 $A_{ij}B_j$(防区 B_j 发生战争且 A_i 部署在 B_j 执行防空作战任务)都是一些条件概率,这些概率依赖于处于对抗体系中的国家和地区的政治、经济、外交、军事实力等情况构成的综合态势。设这些综合态势可以划分为 s 种状态:$Z_1, Z_2, \cdots, Z_s$,且形成了一个综合态势空间 SZ。则[7]

$$\mathrm{SZ} = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_s, Z_i \cap Z_j = \Phi \quad , \quad (i,j = 1,2,\cdots,s;i \neq j)$$

且 $P(Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_s) = 1$。

另外,我们以 SB 表示战争的发生状态空间。显然,SB 只有两个元素(两种状态:发生战争、不发生战争)。以 B 表示发生战争的事件,并假设战争的诱发因素为 $F_1, F_2, \cdots, F_t$,只有在导致了诱发因素的出现才可能导致战争,那么

$$P(F_i) = \sum_{k=1}^{s} P(F_i \mid Z_k)P(Z_k),(i = 1,2,\cdots,t)$$

从而,$P(B_j) = p_j$ 就应理解为概率

$$p_j = \sum_{i=1}^{t} P(B_j \mid F_i)$$

而 $P(B_j \mid F_i) = \dfrac{P(B_jF_i)}{P(F_i)} = \dfrac{P(F_i \mid B_j)P(B_j)}{\sum_{k=1}^{s} P(F_t \mid Z_k)P(Z_k)},(i = 1,2,\cdots,t;j = 1,2,\cdots,n)$,这里的 $P(B_j) = \sum_{k=1}^{s} P(B_j \mid Z_k)P(Z_k)$,$(j = 1,2,\cdots,n)$。

4　讨论

实际上,对于式(2)、(3) 中的概率值的理解和研究还会产生出一些有待于进一步探讨的问题或有用的性质[6,7],从而可以产生更有利于分析和求解的模型与求解算法。如:① 是否在某些情况下可以理解 $\sum_{j=1}^{n} p_j \leqslant 1$,这里,“ = ” 成立表示必然发生战情,“ < ” 成立表明不一定发生战情;$0 \leqslant p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \leqslant 1, 0 \leqslant p_i = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \leqslant 1, (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{m} p_i \leqslant 1, \sum_{j=1}^{n} p_j \leqslant 1$ 。② 对于 $P(A_{ij}B_j)$ 来讲,当防区 B_j 有战情时,肯定会有某一个作战集团防守,即 $\sum_{i=1}^{m} P(A_{ij}B_j) = 1, (j = 1,2,\cdots,n)$;而对于任何部署,各个战区有战情是一个随机事件,即 $\sum_{j=1}^{n} P(A_{ij}B_j) \leqslant 1, (j = 1,2,\cdots,m)$ 。从而,可以给模型(6) 增加约束 $\sum_{j=1}^{n} P(A_{ij}B_j) \leqslant 1$ 而得到新的模型[8]。

5　结束语

随着人类战争进程的发展,兵力部署模型必然面临新的课题。本文研究的是对兵力部署问题的环境中随机因素进行分析,给出了几种典型情况的结果,文中提出的有些问题还有待不断深入研究。

参考文献:

[1] 申卯兴,基于概率度量的兵力部署理论 [J]. 军事运筹与系统工程,2000,2(3):58 - 61.

[2] 《运筹学》教材编写组. 运筹学[M]. 北京:清华大学出版社,1990.

[3] 申卯兴,李为民,陈永革,防空战略作战的势战模型研究[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2001,2(3):58 - 61.

[4] 王凤山,申卯兴. 防空战略作战的势战律建模研究[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2000,1(4):80 - 82.

[5] [苏]Φ. A. 马特韦楚克. 运筹学手册[M]. 北京:新时代出版社,1982.

[6] 盛　骤,谢式千,潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京:高等教育出版社,1989.

[7] Ingram Olkin, Leon J. Gleser, Cyrus Derman. Probability Models and Applications[M]. New York: Macmillan Publishing Co., Inc.. 1980.

[8] Duckworth W E, Gear A E, Lockett A G. A Guide to Operational Research[M]. London: Chapman and Hall Ltd.. 1977.

(编辑:田新华)

A Research on the Strategy Stochastic Force Disposition Model Based on Probability

REN Ji - ye[1,2], CHEN Ming[1] ZHANG Xiao - shui[3]

(1. Automation School, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 2. The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China; 3. The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: Some probability models of strategy force disposition and the description are discussed and through the analysis of the knowledge about the force disposition problem, a mathematical model of force disposition based on probability is given. And, at the same time, some valuable topics are pointed based on the theory of stochastic force disposition in the end.

Key words: probability; force disposition; model