

相容指标约束下离散不确定系统的满意容错控制

韩笑冬, 王执铨

(南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094)

摘要:针对一类线性离散不确定系统,研究了当执行器发生故障时,扇形区域极点指标、 H_∞ 指标和方差指标约束下的满意容错控制问题。在更一般、更实际的执行器故障模型下,利用线性矩阵不等式方法,建立了容错控制中三类指标的相容性理论,并在相容指标约束下给出了有效的控制器设计方法。数值算例验证了结果的有效性。

关键词:容错控制;相容性理论;不确定系统

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2007)04-0075-05

控制系统的可靠性和安全性近年来引起了人们的重视。对于容错控制,大部分的方法都只针对系统故障前后的稳定性进行设计^[1-2],很少考虑系统在发生故障后仍然能够具有其它的性能指标。但是在实际工程中,人们不仅希望系统在发生故障后能够继续安全稳定地运行,还期望具有比较满意的多性能指标^[3]。满意容错控制(Satisfactory Fault-Tolerant Control, SFTC)是融合容错控制和满意控制的思想提出的一个概念^[4],是使容错控制系统能同时满足多个性能约束条件的控制策略。随着实际工程系统对控制性能需求的日益提高,研究同时满足多个期望性能约束的容错控制成为了迫切的需要。

实际工程中通常要设计具有物理可实现性的控制器以使系统具有期望的性能,而期望的性能一般包括以区域极点指标表征的快速性、以稳态方差指标表征的稳态精度和以 H_∞ 指标表征的对有界扰动的抑制能力。本文研究了一类线性离散不确定系统在同时具有扇形区域极点指标、 H_∞ 指标和方差指标约束下的满意容错控制器的设计问题。将离散系统的极点配置在扇形区域内,不仅能保证系统的稳定性,而且能减少输出在暂态过程中的超调量和降低振荡频率,与圆形区域极点配置问题^[5-8]相比具有更明确的物理意义。

1 问题描述

考虑如下的线性不确定离散系统

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (B + \Delta B)u(k) + D\omega(k), z(k) = Cx(k) \quad (1)$$

式中: $x \in R^n$ 为状态向量, $u \in R^p$ 为控制输入, $z \in R^k$ 为被控输出, $\omega(k) \in R^q$ 为零均值高斯白噪声过程,强度为 $W > 0$, 且 $\omega(k)$ 与零均值初始状态 $x(0)$ 不相关; A, B, C, D 为维数适当的常数矩阵; $\Delta A = HF(k)E_1$, $\Delta B = HF(k)E_2$, H, E_1, E_2 均是实数常矩阵, 不确定摄动矩阵 $F(k)$ 是时变范数有界的, 满足 $F(k) \in \Sigma = \{F(k) \in R^{i \times j} | F^T(k)F(k) \leq I\}$ 。本文采用状态反馈控制器的形式

$$u(k) = Kx(k) \quad (2)$$

式中: K 为待求的状态反馈增益阵。考虑到可能的执行器故障 M , 引入开关阵, 其形式为^[1]

$$M = \text{diag}[m_1, m_2, \dots, m_p] \quad (3)$$

式中: $0 \leq m_{i1} \leq m_i \leq m_{in}$ 且 $m_{in} \leq 1$ 。显然, 当 $m_i = 0$ 时, 第 i 个执行器完全失效; 当 $m_i = 1$ 时, 第 i 个执行器正常工作; $0 \leq m_{i1} \leq m_i \leq m_{in}$ 且 $m_i \neq 1$ 时, 第 i 个执行器部分失效。引进如下矩阵: $M_0 = \text{diag}[m_{01}, m_{02}, \dots, m_{0p}]$;

收稿日期: 2007-03-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574082)

作者简介: 韩笑冬(1983-), 男, 山西太原人, 博士生, 主要从事容错控制与故障诊断研究;

王执铨(1939-), 男, 湖北武汉人, 教授, 博士生导师, 主要从事动态大系统故障诊断研究。

$J = \text{diag}[j_1, j_2, \dots, j_p] \quad |L| = \text{diag}[|l_1|, |l_2|, \dots, |l_p|]$ 。式中: $m_{oi} = (m_{i1} + m_{iu})/2, j_i = (m_{iu} - m_{il})/(m_{iu} + m_{il}), l_i = (m_i - m_{oi})/m_{oi}$, 由此得到

$$M = M_0(I + L) \quad |L| \leq J \leq I \tag{4}$$

则包含执行器失效的故障闭环系统可表示为

$$x(k+1) = (A_c + \Delta A_c)x(k) + D\omega(k), z(k) = Cx(k) \tag{5}$$

式中: $A_c = A + BMK, \Delta A_c = HF(k)(E_1 + E_2MK)$ 。若存在状态反馈增益 K , 使故障闭环系统(5)渐近稳定, 则闭环系统的稳态状态协方差矩阵 $X = \lim_{k \rightarrow \infty} E\{x(k)x^T(k)\}$ 存在, 且是如下离散 Lyapunov 方程的唯一半正定解矩阵

$$(A_c + \Delta A_c)X(A_c + \Delta A_c)^T - X + DWD^T = 0 \tag{6}$$

从扰动输入 $\omega(t)$ 到被控输出 $z(t)$ 的传递函数矩阵为 $G(z) = C(zI - A_c - \Delta A_c)^{-1}$, 其 H_∞ 范数定义为 $\|G(z)\|_\infty = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \sigma_{\max}[G(e^{j\theta})]$, $\sigma_{\max}[\cdot]$ 表示给定矩阵的最大奇异值。

图1所示, 扇形区域是在复平面上, 由圆心在原点, 半径为1的一个圆形和两个角形(其中一个角形区域的边界与实轴的夹角为 $\pi/2$)所包含的区域构成。

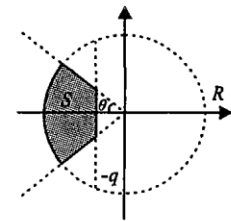


图1 扇形区域

本文所研究的多指标约束满意容错控制问题是: 求解状态反馈控制(2), 希望闭环控制系统满足给定的扇形区域极点指标 S 、稳态状态方差上界指标 σ^2 以及 H_∞ 指标 γ , 即①闭环系统(5)的极点集 $\Lambda(A_c + \Delta A_c) \subset S$; ②状态协方差矩阵 X 满足 $\text{catercorner}(X) \leq \sigma^2$; ③从扰动输入 $\omega(t)$ 到被控输出 $z(t)$ 的传递函数矩阵满足 $\|G(z)\|_\infty < \gamma$ 。

2 主要结果

引理1^[9]: 故障闭环系统(5)的极点位于图1所示的扇形区域(不包括边界点)的充要条件是下述不等式组有正定解 Q

$$(A_c + \Delta A_c)Q + Q(A_c + \Delta A_c)^T + 2qQ < 0 \tag{7}$$

$$(\sin\theta - i\cos\theta)(A_c + \Delta A_c)Q + (\sin\theta + i\cos\theta)Q(A_c + \Delta A_c)^T < 0 \tag{8}$$

$$(A_c + \Delta A_c)Q(A_c + \Delta A_c)^T - Q < 0 \tag{9}$$

定理1: 存在控制增益 K 使故障闭环系统(5)满足极点指标约束条件①的充分必要条件是实变量 $\varepsilon > 0$ ($i = 1 - 6$) 和矩阵变量 Q, S 的以下 LMI 有解

$$\begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Lambda & 0 & S^T J^{1/2} & 0 \\ 0 & \Phi & 0 & \Lambda & 0 & S^T J^{1/2} \\ * & * & -\varepsilon_1 I + \varepsilon_2 E_2 M_0 J M_0 E_2^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I + \varepsilon_2 E_2 M_0 J M_0 E_2^T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega & -\Theta & \Psi & \varepsilon_4 \cos\theta B M_0 J M_0 E_2^T & S^T J^{1/2} & 0 \\ -\Theta & \Omega & \varepsilon_4 \cos\theta B M_0 J M_0 E_2^T & \Psi & 0 & S^T J^{1/2} \\ * & * & -\varepsilon_3 I + \varepsilon_4 E_2 M_0 J M_0 E_2^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_3 I + \varepsilon_4 E_2 M_0 J M_0 E_2^T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_4 I & 0 \\ * & * & * & * & 0 & -\varepsilon_4 I \end{bmatrix} < 0 \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} -Q + DWD^T + \varepsilon_5 HH^T + \varepsilon_6 BM_0 JM_0 B^T & AQ + BM_0 S & \varepsilon_6 BM_0 J(E_2 M_0)^T & 0 \\ * & -Q & (E_1 Q + E_2 M_0 S)^T & S^T J^{1/2} \\ * & * & -\varepsilon_5 I + \varepsilon_6 E_2 M_0 J(E_2 M_0)^T & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_6 I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

式中: $\Phi = AQ + BM_0 S + (AQ + BM_0 S)^T + 2qQ + \varepsilon_1 HH^T + \varepsilon_2 BM_0 JM_0 B^T$, $\Lambda = (E_1 Q + E_2 M_0 S)^T + \varepsilon_2 BM_0 JM_0 E_2^T$, $\Omega = \sin\theta(AQ + BM_0 S + (AQ + BM_0 S)^T + 2qQ) + \varepsilon_3 HH^T + \varepsilon_4 BM_0 JM_0 B^T$, $\Theta = -\cos\theta(AQ + BM_0 S - (AQ + BM_0 S)^T)$, $\Psi = (E_1 Q + E_2 M_0 S)^T + \varepsilon_4 \sin\theta BM_0 JM_0 E_2^T$ 。若 (Q, S, ε_i) 是上述线性矩阵不等式的任一解, 则 $K = SQ^{-1}$ 就是一个满足极点指标约束①的容错控制反馈增益矩阵。而 Q 是系统(5)的稳态状态协方差矩阵集合 X_K 的一个上界, 即对所有 $X \in X_K$, 恒有 $X < Q$ 。

证明略, 类似的证明过程可参见文献[10]。

定理 2 考虑故障闭环系统(5), 系统渐近稳定, 且 $\|G(z)\|_\infty < \gamma$ 的充分必要条件是实变量 $\varepsilon_7 > 0, \varepsilon_8 > 0$ 和矩阵变量 $Q = Q^T > 0, S$ 的以下 LMI 有解

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -Q + C^T C + \varepsilon_7 HH^T \\ + \varepsilon_8 BM_0 JM_0 B^T \end{pmatrix} & 0 & AQ + BM_0 JM_0 E_2^T & \varepsilon_8 BM_0 JM_0 E_2^T & 0 \\ * & -\gamma^2 I & DQ & 0 & 0 \\ * & * & -Q & QE_1^T + S^T M_0 E_2^T & S^T J^{1/2} \\ * & * & * & -\varepsilon_7 I + \varepsilon_8 E_2 M_0 JM_0 E_2^T & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_8 I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

综合定理 1 和定理 2, 可以得出如下结论。

定理 3 给定扇形区域极点指标 S 、方差上界指标 σ^2 和 H_∞ 指标 γ , 若故障闭环系统(5)关于实变量 $\varepsilon_i > 0 (i = 1 - 8)$ 和矩阵变量 Q, S 的线性矩阵不等式(10) - (14)有解。则故障闭环系统(5)同时满足约束条件①、②、③。若 (Q, S, ε_i) 是上述线性矩阵不等式组的一组可行解, 于是状态反馈增益 $K = SQ^{-1}$ 即为所求的状态反馈满意容错控制器。这里 Q_1 满足 $\text{catercorner}(Q_1) = \sigma^2$ 的任意正定对称矩阵。

$$Q < Q_1 \quad (14)$$

满足定理 3 的可行解不一定总是存在的, 它与给定的性能指标有着密切的关系, 因此, 性能指标的取值不是任意的, 只有给定的性能指标都在可行范围内, 所求的满意容错控制才有可行解。因此, 在求取可行解时, 首先要判断给定的性能指标是否在可行范围内。

定理 4 对给定的极点指标 S , 若闭环系统(5)状态反馈鲁棒可配置, 则关于矩阵变量 (Q, S) 的线性矩阵不等式(10) - (13)总有可行解, 因此, 下述极值问题有意义

$$\min(\text{tr}Q) : (Q, S, \varepsilon_i, \gamma^2) \text{ s. t. LMI s (10 - 13)} \quad (15)$$

令 $(Q_L, S_L, \varepsilon_{iL})$ 为上述极值问题的相应极小值, 因此, 若给定方差上界指标 $\sigma^2 \geq \text{catercorner}(Q_L)$, 则由式(10) - (14)构成的线性矩阵不等式组必有可行解。于是, 下述极值问题有意义

$$\min(\gamma^2) : (Q, S, \gamma^2, \varepsilon_i) \text{ s. t. LMI s (10 - 14)} \quad (16)$$

若记 $(Q_0, S_0, \gamma_0^2, \varepsilon_{i0})$ 为上述极值问题的极小值点, 显然, 给定区域极点指标 S 、方差上界指标 $\sigma^2 \geq \text{catercorner}(Q_L)$ 以及 H_∞ 扰动衰减指标 $\gamma^2 < \gamma_0^2$, 定理 3 必有可行解, 所给出的三类约束指标具有相容性。根据以上叙述以及定理 1、定理 2、定理 3 和定理 4, 可以得出如下的结论, 它为有效求取满足三类相容指标约束的容错控制器提供了理论依据。

定理 5 考虑故障闭环系统(5), 假设区域极点指标 S 状态反馈鲁棒可配置, 给定 H_∞ 指标 $\gamma^2 < \gamma_0^2$, 方差上界指标 $\sigma^2 \geq \text{catercorner}(Q_L)$, 则关于变量 (Q, S, ε_i) 的线性矩阵不等式(10) - (14)总有可行解, 且若 (Q, S) 是其任一可行解, 则 $K = SQ^{-1}$ 就是一个满足这三个约束的容错控制反馈增益。

为便于实际操作, 给出如下离散不确定线性系统同时满足三类指标约束下的满意容错控制器设计步骤。

- a) 验证 LMI s (10) - (13) 的可行性问题, 判断是否存在满足三类指标约束的容错控制器;
- b) 若 LMI s (10) - (13) 有可行解, 求解极值问题(15)并确定方差上界指标;
- c) 对给定的方差上界指标 $\sigma^2 \geq \text{catercorner}(Q_L)$, 求解极值问题(16), 分析与给定区域极点指标和方差

上界指标相容的 H_∞ 指标的取值范围;

d) 给定 H_∞ 指标 $\gamma^2 < \gamma_0^2$, 利用 LMI(10) - (14) 的可行解构造同时满足约束条件①、②、③的容错控制律。

3 数值算例

假定不确定离散系统(1)中的系数矩阵如下:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, H = E_1 = 0.5I, E_2 = B$$

给定执行器故障矩阵为 $M_L = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}, M_U = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$ 。区域极点指标为图1所示扇形区域, 其中 $\theta = \pi/4, q = 0.25$ 方差上界指标 $\sigma^2 = \text{diag}[0.21 \quad 0.12 \quad 0.27]$ 以及 H_∞ 扰动衰减指标 $\gamma = 1$ 。应用 Matlab -

LMI 求解关于 $(Q, S, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ 的线性矩阵不等式 (10) - (14) 得到 $Q = \begin{bmatrix} 0.2051 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1190 & 0.0733 \\ 0 & 0.0733 & 0.2605 \end{bmatrix}$,

$$S = \begin{bmatrix} 1.2108 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5649 & -2.4900 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1.2108 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5649 & -2.4900 \end{bmatrix}。$$

4 结束语

在容错控制中, 仅仅保证故障系统的稳定性是不够的, 还需要考虑一些性能指标, 如鲁棒性、抗干扰性等。因此, 研究多约束条件下的满意容错控制系统, 对容错控制理论走向实际工程具有深远的理论意义和应用价值。本文研究了一类线性离散不确定系统在同时具有扇形区域极点指标、 H_∞ 指标和方差指标约束下的满意容错控制器的设计问题。在更实际的执行器故障模型下利用 LMI 方法, 分析了相容指标的取值范围和多指标约束下的容错控制器存在的充分条件, 并给出控制器的构造性设计方法。数值算例验证了结果的有效性。

参考文献:

- [1] Yang Y, Yang G H, Soh Y C. Reliable Control of Discrete - Times With Actuator Failure[J]. IEE Proc - Control Theory Application, 2000, 147(4): 428 - 432.
- [2] Yang G H, Wang J, Yeng C S. Reliable Guaranteed Cost Control for Uncertain Nonlinear Systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(11): 2188 - 2192.
- [3] Guo Zhi. A survey of satisfying control and estimation[A]. Chen Hanfu. Proceedings of the 14th IFAC World Congress[C]. Oxford, U K: Elsevier Science Ltd, 1999. 443 - 447.
- [4] Zhang G, Wang Z, Han X, et al. Research on Satisfactory Control Theory and Its Application in Fault - Tolerant Technology [A]. The 5th World Congress on Intelligent Control and Automation[C]. Hangzhou. China, 2004. 1521 - 1524.
- [5] Garcia G, Bernussou J. Pole Assignment for Uncertain Systems in Specified Disk by State Feedback[J]. IEEE Trans Automatic Control, 1995, 40(1): 184 - 190.
- [6] Wang Z. Robust State Estimation for Perturbed Systems With Error Variance and Circular pole Constraints: the Discrete - Time Case[J]. International Journal Control, 2000, 73(4): 303 - 311.
- [7] Zhang D, Wang Z, Hu S. Satisfactory Fault - Tolerant Controller Design With Variance Circular Pole Constraints[A]. The 6th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Process[C]. August 29, 2006, Beijing, China.
- [8] Zhang D, Wang Z, Hu S. Robust Satisfactory Fault - Tolerant Controller Design with Closed - Loop Poles and Variance Constraints[A]. Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation[C]. June 21 - 23, 2006, Dalian, China.
- [9] Yao B, Sun X. Reliable Control of Pole Placement in Sector Region[A]. Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation[C]. June 15 - 19, 2004, Hangzhou, China. 2004, 1: 39 - 42.

[10] 张刚. 多指标约束下的满意容错控制研究[D]. 南京:南京理工大学,2006.

(编辑:姚树峰)

Satisfactory Fault – tolerant Controller Design for Discrete Uncertain Systems with Constrains of Consistent Indices

HAN Xiao – dong, WANG Zhi – quan

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: The problem of satisfactory fault – tolerant control system design for linear discrete uncertain systems against actuator failures with sector pole index, steady variance index and H – infinity constraints is addressed. A more practical and general model of actuator failures is adopted. Based on linear matrix inequality approach, the consistency theory on sector pole index, steady variance index and H – infinity constraints is set up, and the ranges of consistent indices are analyzed in details. Furthermore, the effective controller design method for systems with constraints of consistent indices is proved. Numerical examples are given to illustrate the validity of the design method.

Key words: fault – tolerant control; consistency theory; uncertain systems

(上接第64页)

参考文献:

- [1] Cryhvik. A Adaptive OFDM for wideSand radio channels[A]. In: II Proc of IEEE GLOBECOM 96 London IEEE[C]. London: 1996:713 – 718.
- [2] 柯峰,叶梧,冯穗力,等. 多用户 OFDM 系统中的快速自适应分配策略[J]. 华南理工大学学报:自然科学版,2005,33(3):40 – 43.
- [3] 何修富,郝坦锁,廖桂生. 未知多径信道下广义 OFDM 用户标识点选择[J]. 西北大学学报:自然科学版,2006,36(5):721 – 724.
- [4] Tu J C, Cioffi J M A. Loading Algorithm For the Concatenation of Coset Codes With Multichannel Modulation methods[A]. In: II Proceedings of IEEE GLOBECOM'90 San Diego IEEE[C]. San Diego:1990(1):183 – 1187.
- [5] Li Y, Su G. An Adaptive Modulation and Powerallocation Algorithm in OFDM system[A]. In II Proceedings of IEEE ICCAS 2004[C]. Chengdu :2004:339 – 343.
- [6] Hughes – Hartogs D. Ensemble Modem Structure For Imperfect Transmission Media US 4833706[P]. 1989 – 05 – 2323.
- [7] Krongold B S Ramchandran K, Jones D L. Computationally Efficient Optimal Power Allocation Algorithms For Multi – Carrier Communcation Systems[J]. IEEE Transactions on Communications,2000,48(1):23 – 27.
- [8] 任天鹏,张尔杨. OFDM 系统的子信道比特快速自适应分配算法[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2006,7(5):68 – 70.

(编辑:田新华,徐楠楠)

A New Bit Allocation Algorithm in OFDM System

ZHU Xiao – peng, LI Hong – wei, JIANG Li

(The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: A new adaptive bit and power allocation algorithm in single user OFDM system is proposed. At the request of object BER, the bit allocation algorithm is used in two steps to allocate appropriate bits to each subcarrier, finally the sum power is minimized. The simulation results shows that the performance of the proposed algorithm is approaching to that of the optimization method, and the complexity of the algorithm is greatly reduced.

Key words: OFDM; bit allocation; channel plus; average bit SNR