

# 一种自适应阵列指向误差校正方法

冯存前, 童宁宁, 丁前军

(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

**摘要:**在自适应阵列处理中,指向误差将使阵列处理性能严重下降,必须进行校正。在分析指向误差对自适应波束形成性能影响的基础上,提出一种利用阵列接收数据和指向误差不确定度的指向误差校正方法,通过牛顿法迭代求解用于修正阵列导向矢量的因子,然后进行自适应波束形成。理论分析和仿真结果表明:新方法对指向误差具有较好的鲁棒性。

**关键词:**自适应阵列;指向误差;对角加载

**中图分类号:** TN953    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1009-3516(2007)04-0053-05

在自适应阵列中,当存在指向误差时,采用 SMI (Sample Matrix Inversion) 方法得到的自适应阵列方向图在期望信号方向形成零陷,即期望信号被当成干扰加以抑制,对指向误差鲁棒的自适应波束形成方法包括对主波束施加线性约束、基于特征空间波束形成 (ESB: Eigen-Space Based)、对角加载等等。线性约束法是对主波束方向施加点约束或导数约束从而改善主波束形状<sup>[1,2]</sup>,从而克服期望信号抑制现象,但附加约束使得自由度减少,且约束与指向误差的不确定度无关。ESB 方法<sup>[3]</sup>在期望信号较强时能校正小的指向误差对自适应阵列性能的影响,但在期望信号较弱时失效;对角加载技术可用于低快拍数时改善阵列方向图和克服指向误差的影响,但传统的对角加载方法中,加载量难以根据实际信号环境准确得到<sup>[4]</sup>。本文提出一种新的指向误差校正方法,通过分析指向误差对波束形成性能的影响,导出一种利用阵列接收数据(协方差矩阵)和指向误差范围信息的对角加载方法,与传统对角加载相比,新方法具有更好的鲁棒性,仿真结果证明了本文方法的有效性。

## 1 阵列信号模型

设阵列为  $N$  元窄带均匀线性阵,阵元间隔为半个波长 ( $d = \lambda/2$ ),  $M$  个窄带源同时从远场入射到阵列上,其中包括一个期望信号,角度为  $\theta_0$ ,其余为干扰,到达角度分别为  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{M-1}$ ,干扰之间及干扰与期望信号之间互不相关,则阵列接收数据为<sup>[5]</sup>

$$X(t) = AS(t) + N(t) \quad (1)$$

$$A = [a(\theta_0), a(\theta_1), \dots, a(\theta_{M-1})] \quad (2)$$

其中  $a(\theta_i)$  为第  $i$  个信号源的导向矢量,  $i = 0, 1, \dots, M-1$ , 则

$$a(\theta_i) = [1, \exp(j \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta_i), \dots, \exp(j \frac{2\pi}{\lambda} (M-1) d \sin \theta_i)]^T$$

$j$  为虚数单位,  $d$  为阵元之间间距。  $S(t) = [s_0(t), s_1(t), \dots, s_{M-1}(t)]^T$  是信号复包络矢量,  $N(t)$  为功率为  $\sigma_n^2$  的空间独立白噪声,与期望信号及干扰不相关。设  $K$  个快拍数据组成的矩阵为  $\bar{X} = [x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_p)]$ , 则阵列协方差矩阵估计为  $\hat{R} = (1/K) \bar{X} \bar{X}^H$ , SMI 算法求得的最优权矢量为

收稿日期: 2006-06-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60272086)

作者简介: 冯存前(1975-), 男, 陕西富平人, 讲师, 博士, 主要从事防空武器系统电子对抗和雷达信号处理研究;  
童宁宁(1963-), 女, 江苏太仓人, 教授, 博士, 主要从事雷达系统和雷达信号处理研究。

$$W_{\text{opt}} = \frac{\hat{R}^{-1}a(\theta_0)}{a^H(\theta_0)\hat{R}^{-1}a(\theta_0)} \quad (3)$$

## 2 利用信号抑制度与指向误差的关系进行指向误差校正

当存在指向误差时,设指向误差为  $\Delta = \theta_e - \theta_0$ ,  $\theta_e$  为估计的期望信号方向,则由式(3)得

$$W = \frac{\hat{R}^{-1}a(\theta_e)}{a^H(\theta_e)\hat{R}^{-1}a(\theta_e)} \quad (4)$$

由于存在指向误差,所以用式(4)求得的权矢量对阵列加权得到的方向图在期望信号方向形成零陷,如图1所示。这里取  $N=10$ ,期望信号在  $0^\circ$  方向,输入信噪比(SNR)为 10 dB,指向误差为  $2^\circ$ ;两个干扰角度分别为  $-32^\circ$  和  $40^\circ$ ,干扰噪声比(JNR)均为 30 dB。图1中,虚线为存在指向误差时的阵列方向图,实线为无指向误差时的阵列方向图,可见,当存在指向误差时,在期望信号方向形成零陷,期望信号受到抑制,但在干扰方向仍能形成零陷,这意味着不管是否存在指向误差,干扰(这里假设均为旁瓣干扰)均被抑制,又因为式(3)即是最小方差无失真响应(MVDR)波束形成器的最优权值,则噪声也能得到有效抑制。因此,当期望信号较强时,可近似认为自适应阵列的输出中主要为期望信号成份,剩余干扰和噪声相对较弱;对期望信号较弱的情况,由于指向误差的影响也变小,这里不予考虑。当无指向误差时,期望信号得到有效恢复,阵列输出功率较大;存在指向误差时,期望信号方向形成零陷,且指向误差越大,零陷越深,信号抑制度越大,因此,阵列输出功率越小。图2示出阵列输出功率随指向误差的变化曲线,仿真结果由 100 次平均得到。

阵列输出功率  $P_o = W^H R W$ , 又由式(4)得

$$P_o = \frac{1}{a^H(\theta_e)\hat{R}^{-1}a(\theta_e)} \quad (5)$$

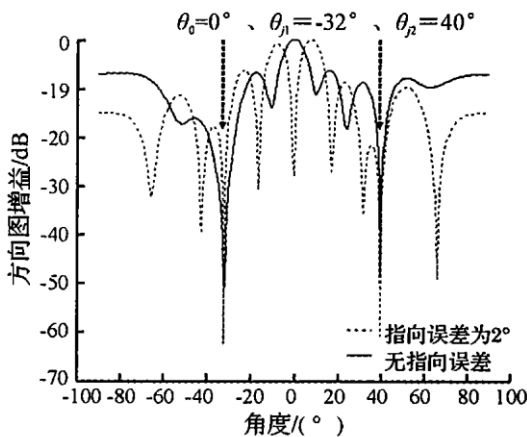


图1 指向误差引起期望信号抑制

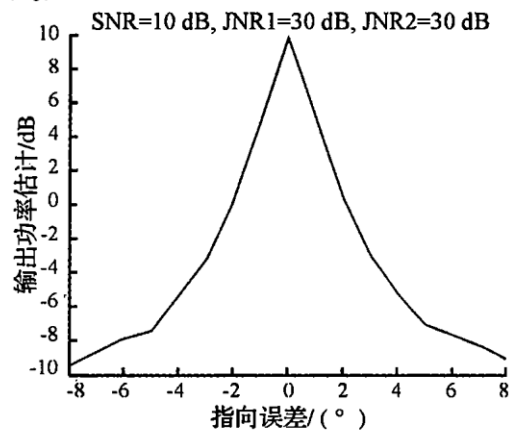


图2 阵列输出功率与指向误差的关系

设  $\theta_e$  为估计的期望信号方向,可能的指向误差范围可以事先估计得到,即

$$\|a(\theta) - a(\theta_e)\|^2 \leq \varepsilon \quad (6)$$

对满足式(6)的任意可能的期望信号角度  $\theta$ ,对应的自适应阵列输出为

$$P_o(\theta) = \frac{1}{a^H(\theta)\hat{R}^{-1}a(\theta)} \quad (7)$$

由上面的分析及图2,满足式(6)且使阵列输出功率  $P_o(\theta)$  最大的  $a(\theta)$  即为期望信号导向矢量  $a(\theta)$  的最佳估计,因此,指向误差校正问题等价于

$$\begin{cases} \min a^H(\theta)\hat{R}^{-1}a(\theta) \\ \|a(\theta) - a(\theta_e)\|^2 \leq \varepsilon \end{cases} \quad (8)$$

因为  $a(\theta) \neq 0$ , 则  $\|a(\theta) - a(\theta_e)\|^2$  不包含导向矢量空间的零向量,故可假定  $\|a(\theta_e)\|^2 > \varepsilon$ , 在此条件下,可以证明式(8)等价于<sup>[6,7]</sup>

$$\begin{cases} \min \mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta) \\ \|\mathbf{a}(\theta) - \mathbf{a}(\theta_e)\|^2 = \varepsilon \end{cases} \quad (9)$$

用 Lagrange 乘子法求解式(9),定义目标函数为

$$f = \mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta) + \gamma (\|\mathbf{a}(\theta) - \mathbf{a}(\theta_e)\|^2 - \varepsilon) \quad (10)$$

Lagrange 乘子  $\gamma \geq 0$ , 对式(10)求对  $\mathbf{a}(\theta)$  的导数并使之等于零即得  $\alpha(\theta_0)$  的校正值  $\hat{\alpha}(\theta_0)$

$$\hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\alpha}(\theta_0) + \gamma [\hat{\alpha}(\theta_0) - \mathbf{a}(\theta_e)] = 0 \quad (11)$$

解之得

$$\hat{\alpha}(\theta_0) = (\frac{\hat{\mathbf{R}}^{-1}}{\gamma} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}(\theta_e) \quad (12)$$

运用矩阵求逆公式可得

$$\hat{\alpha}(\theta_0) = \mathbf{a}(\theta_e) - (\mathbf{I} + \gamma \hat{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{a}(\theta_e) \quad (13)$$

用  $\hat{\alpha}(\theta_0)$  代替  $\mathbf{a}(\theta)$  代入(9)下式得

$$\|(\mathbf{I} + \gamma \hat{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{a}(\theta_e)\|^2 = \varepsilon \quad (14)$$

对  $\hat{\mathbf{R}}$  进行特征分解得

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{U}$  为  $\hat{\mathbf{R}}$  的特征向量构成的矩阵,  $\mathbf{\Lambda}$  是以  $\hat{\mathbf{R}}$  的特征值为对角线元素的对角阵, 设特征值依次为  $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_N$ , 则由式(14)、(15)得

$$\varphi(\gamma) = \|(\mathbf{I} + \gamma \hat{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{a}(\theta_e)\|^2 = \sum_{k=1}^N \frac{|U^H \mathbf{a}(\theta_e)|^2}{(1 + \gamma \rho_k)^2} = \varepsilon \quad (16)$$

由  $\|\mathbf{a}(\theta_e)\|^2 > \varepsilon$  及式(16)得:  $\varphi(0) > \varepsilon$ ,  $\varphi(+\infty) = 0 < \varepsilon$ , 因为  $\varphi(\gamma)$  在  $\gamma \geq 0$  时为单调递减函数, 因此, 式(16)有唯一解  $\gamma > 0$ 。由  $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_N$  及式(16)可确定  $\gamma$  的范围

$$\frac{\|\mathbf{a}(\theta_e)\| - \sqrt{\varepsilon}}{\rho_1 \sqrt{\varepsilon}} \leq \gamma \leq \frac{\|\mathbf{a}(\theta_e)\| - \sqrt{\varepsilon}}{\rho_N \sqrt{\varepsilon}} \quad (17)$$

结合式(16)、(17), 可用牛顿法求解 Lagrange 乘子  $\gamma$ 。求出后, 代入式(12)即得导向矢量校正值  $\hat{\alpha}(\theta_0)$ 。

### 3 鲁棒对角加载自适应波束形成

上面求出了期望信号导向矢量的校正值, 则自适应阵列权矢量为

$$\mathbf{W}_{\text{opt}} = \frac{\hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\alpha}(\theta_0)} \quad (18)$$

代入式(12)并整理得

$$\mathbf{W}_{\text{opt}} = \frac{(\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{I}/\gamma)^{-1} \mathbf{a}(\theta_e)}{\mathbf{a}^H(\theta_e) (\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{I}/\gamma)^{-1} \hat{\mathbf{R}} (\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{I}/\gamma)^{-1} \hat{\alpha}(\theta_e)} = \frac{1}{\mu} (\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{I}/\gamma)^{-1} \hat{\alpha}(\theta_e) \quad (19)$$

可以看出, 本文的指向误差校正方法等效为对角加载方法, 加载量为  $1/\gamma$ , 由式(16)知, 加载量是由阵列协方差矩阵和指向误差不确定度  $\varepsilon$  共同确定的, 利用阵列接收数据和指向误差不确定度有望提高对角加载对信号环境的鲁棒性。

### 4 仿真结果及分析

仿真1: 鲁棒对角加载对指向误差的校正作用。阵列为10元等距线阵, 阵元间隔为半波长, 期望信号从  $0^\circ$  入射, 信噪比为10 dB, 两个干扰方向分别为  $-32^\circ$ 、 $40^\circ$ , 干噪比均为30 dB, 快拍数取为500。指向误差为  $2^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = \|\mathbf{a}(\theta_0) - \mathbf{a}(\theta_e)\|^2 = 3.25$ , 由于  $\varepsilon_0$  不能准确得到, 取  $\varepsilon = 3.5$ , 后面的仿真说明, 在  $\varepsilon_0$  左右取值均可得到较好的效果。图3示出 SMI、对角加载(加载量取经验值为阵元噪声功率的10倍)、鲁棒对角加载方法

形成的方向图,可以看出,对角加载对指向误差的校正作用不大,本文的方法则可克服信号抑制现象,得到好的主波束形状,干扰方向零陷略微变浅。图4为采用上述3种算法时自适应阵列输出信干噪比随指向误差的变化曲线,指向误差范围为 $-8^{\circ}$ ~ $8^{\circ}$ ,对应 $\varepsilon$ 的范围为0~22.91,仿真中取 $\varepsilon=8$ ,仿真结果由100次平均得到,如图4所示,鲁棒对角加载能在较大的指向误差范围内具有更好的指向误差校正能力,在对指向误差的鲁棒性增强的同时,在无指向误差时性能低于对角加载和SMI方法。

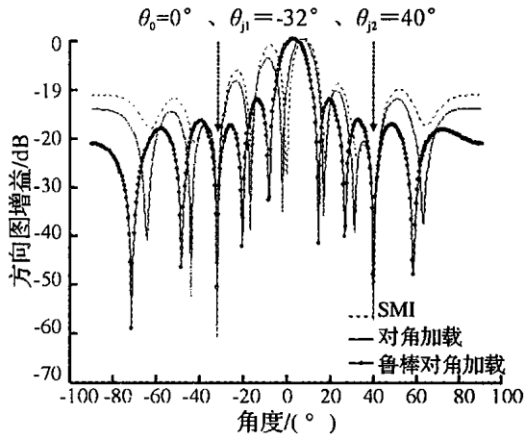


图3 鲁棒对角加载形成的方向图

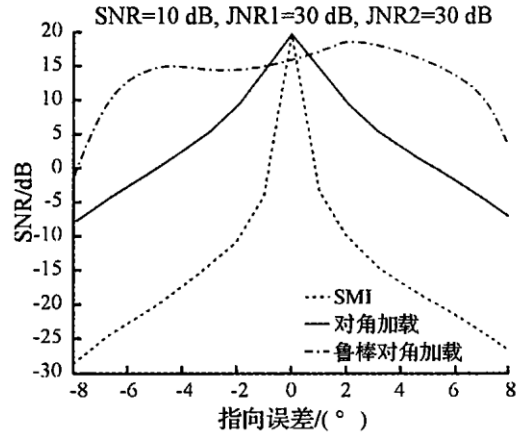


图4 阵列输出 SINR 随指向误差的变化

仿真2:  $\varepsilon$ 对指向误差校正性能的影响。指向误差为 $2^{\circ}$ ,  $\varepsilon_0 = 3.25$ ,其它条件同上,仿真当 $\varepsilon$ 取不同值时输出信干噪比(SINR)变化的情况,仿真结果由100次平均得到,如图5所示:在 $\varepsilon_0$ 附近的一定范围内, $\varepsilon$ 的取值对输出信干噪比的影响不大,特别是当 $\varepsilon > \varepsilon_0$ 时, $\hat{a}(\theta_0)$ 位于式(6)定义的范围内,对指向误差的校正总是有效的,但 $\varepsilon$ 取太大则导致求解式(8)时搜索的范围太大,不易收敛,校正效果反而变差。 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 则使得 $\hat{a}(\theta_0)$ 不在式(6)定义的范围内,所以输出信干噪比下降。

仿真3:输出信干噪比随输入信噪比的变化。取输入SNR从 $-10$  dB到 $20$  dB变化,指向误差为 $2^{\circ}$ ,取 $\varepsilon = 4.5$ ,其它条件不变,图6示出自适应阵列输出信干噪比随SNR的变化曲线。从图6可见,当输入信噪比增大时,SMI算法在期望信号方向形成的零陷也加深,输出SINR反而下降;而对角加载因为采用的是固定加载量,也不能有效克服指向误差的影响(虽然略比SMI略有改善,见图3);鲁棒对角加载方法则可针对信号环境和指向误差不确定度的粗略估计,得到优化的对角加载量,能有效克服信号抑制,故其输出信干噪比随输入信噪比的增大而上升。

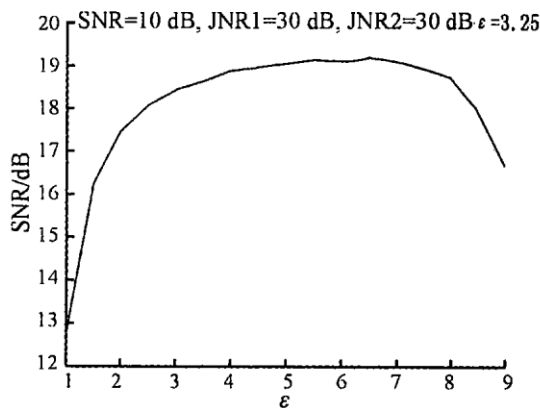


图5  $\varepsilon$ 对指向误差校正性能的影响

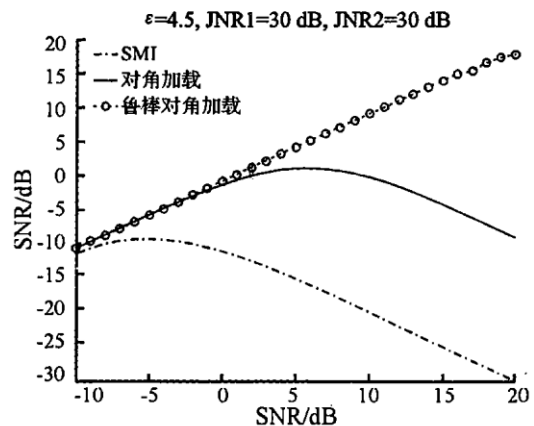


图6 输出 SINR 与输入 SNR 的关系

## 5 结论

当存在指向误差时,应用SMI自适应波束形成方法在期望信号方向产生零陷,且指向误差越大,零陷越

深,但干扰和噪声能被有效抑制,故自适应阵列输出功率随指向误差的增大而下降。本文在此基础上提出一种有效的指向误差校正方法,用校正后的期望信号导向矢量进行自适应波束形成等效于对角加载,但加载量是由信号环境和指向误差不确定度求得的,仿真结果表明,新的对角加载方法对指向误差具有更好的鲁棒性。

#### 参考文献:

- [1] Applebaum S P, Chapman D J. Adaptive Arrays With Main Beam Constraints[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1976, 24(9): 650 - 662.
- [2] Keh - Chiarnng Huarng, Chien - Chung Yeh. Performance Analysis of Derivative Constraint Adaptive Arrays With Pointing Errors [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1992, 40(8): 975 - 981.
- [3] Chang L, Yeh C C. Effect of Pointing Errors on the Performance of the Projection Beamformer[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1993, 41(8): 1045 - 1056.
- [4] 陈晓初. 自适应阵对角线加载研究[J]. 电子学报, 1998, 26(4): 29 - 35.
- [5] Vorobyov S A, Gershman A B, Luo Z Q. Robust Adaptive Beamforming Using Worst - Case Performance Optimization: A Solution to the Signal Mismatch problem[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(2): 313 - 324.
- [6] 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979.
- [7] 韩英臣, 张永顺. 一种基于特征子空间扩展的自适应波束成形方法[J]. 空军工程大学学报: 自然科学版, 2004, 5(4): 53 - 57.

(编辑: 田新华)

## A Calibration Method of Steering Errors in Adaptive Array

FENG Cun - qian, TONG Ning - ning, DING Qian - jun

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China)

**Abstract:** In conventional adaptive array processing, the array processing performance will be degraded seriously because of the steering error, which must be calibrated. Based on the analysis of the effect of steering errors on adaptive beam - forming performance, a new method of calibrating the errors is presented, in which the array data and the uncertainty of the steering errors are utilized for iteratively computing the factor used in modifying the array steering vector. Adaptive beam - forming is performed with the calibrated steering vector. The theoretical analysis and simulation results show that the new method is better in robustness to the steering errors.

**Key words:** adaptive array; steering errors; diagonal loading