

# 量测不确定条件下离散时间滤波系统的 Cramér - Rao 下限研究

乔向东<sup>1</sup>, 张志伟<sup>2</sup>

(1. 空军工程大学 电讯工程学院, 陕西 西安 710077; 2. 空军装备研究院航空装备研究所, 北京 100076)

**摘要:**迄今对各种次优数据关联算法的性能评估通常只是在算法间相互比较的基础上进行的, 缺乏各算法绝对次优程度的量化说明。本文对量测不确定性条件下多传感器融合系统状态估计的 Cramér - Rao 下限进行了研究, 对 M. L. Hernandez 的成果做了进一步推广, 给出了量测不确定性条件下具有不同观测噪声统计特征的多传感器融合滤波系统估计 CRLB 的计算公式。最后对多个参数与稳态 CRLB 间的关系进行了仿真实验, 并指出有关文献中存在的错误。

**关键词:**离散时间系统; 滤波; 性能

**中图分类号:** TN957.52      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1009 - 3516(2006)06 - 0058 - 04

目标跟踪与动态系统估计的主要差别在于前者存在数据关联问题, 也有各种次优的数据关联算法, 然而迄今对这些算法的性能评估通常仅是在算法之间相互比较的基础上进行的, 缺乏各算法绝对次优程度的量化分析。我们需要知道各种次优算法到底丢失了哪些信息以及其估计误差均方差与某种下限标准的接近程度。Cramér - Rao 下限(CRLB)是一种广泛采用的无偏参数或状态估计的误差均方差的下限标准<sup>[1]</sup>, 完全可以作为数据关联算法绝对次优程度的标准。

## 1 随机状态向量的 CRLB

随机状态向量滤波估计的 CRLB 通常被称为后验 CRLB(PCRLB), 在不引起混淆的前提下本节仍然使用 CRLB。CRLB 被定义为 Fisher 信息矩阵的逆矩阵。设  $z$  为量测向量,  $x$  为被估计的维随机状态向量,  $p(z, x)$  为  $z$  和  $x$  的联合概率密度函数,  $\hat{x}(z)$  为  $x$  的无偏估计, 则估计  $\hat{x}(z)$  的 CRLB 为

$$E\{[\hat{x}(z) - x][\hat{x}(z) - x]^T\} \geq J^{-1} \tag{1}$$

其中 Fisher 信息矩阵  $J \in [n \times n]$ , 有

$$J = E\{[\nabla_x \log(p(z, x))][\nabla_x \log(p(z, x))]^T\} = -E\{\nabla_{xx} \log(p(z, x))\} \tag{2}$$

式中,  $\nabla_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\nabla_{xx} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial x}$ 。初始 Fisher 信息矩阵  $J_0 = E\{-\nabla_{x_0 x_0} \log p(x_0)\}$ 。

文献[1]提出一种类似于 Riccati 方程的 Fisher 信息矩阵  $J$  的递推求解算法<sup>[1]</sup>, 有

$$J_{k+1} = D_k^{22} - D_k^{21}(J_k + D_k^{11})^{-1}D_k^{12} \tag{3}$$

其中:  $D_k^{11} = E\{-\nabla_{x_k x_k} \log p(x_{k+1} | x_k)\}$ ;  $D_k^{12} = E\{-\nabla_{x_k+1 x_k} \log p(x_{k+1} x_k)\}$ ;  $D_k^{21} = E\{-\nabla_{x_k x_{k+1}} \log p(x_{k+1} x_k)\} = D_k^{12}$ ;  $D_k^{22} = D_k^{33} + J_{k+1}$ ;  $D_k^{33} = E\{-\nabla_{x_{k+1} x_{k+1}} \log p(x_{k+1} | x_k)\}$ 。

这里:  $J_{k+1} = E\{-\nabla_{x_{k+1} x_{k+1}} \log p(z_{k+1} | x_{k+1})\} \tag{4}$

若目标状态模型与量测模型分别为

收稿日期: 2005 - 10 - 26

基金项目: 军队专项科研基金资助项目

作者简介: 乔向东(1970 -), 男, 陕西佳县人, 副教授, 博士, 主要从事信息融合与信息安全研究。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (5) \quad \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{w}_k$  与  $\mathbf{v}_k$  为统计独立的零均值、方差为  $\mathbf{Q}_k$  和  $\mathbf{R}_k$  的高斯白噪声序列, 就有

$$\mathbf{D}_k^{11} = \mathbf{F}'_k \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{F}_k \quad ; \quad \mathbf{D}_k^{12} = -\mathbf{F}'_k \mathbf{B}_k^{-1} \quad ; \quad \mathbf{D}_k^{33} = \mathbf{Q}_k^{-1} \quad ; \quad \mathbf{J}'_{k+1} = \mathbf{H}'_{k+1} \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{H}_{k+1}$$

将  $\mathbf{D}_k^{11}, \mathbf{D}_k^{12}, \mathbf{D}_k^{33}$  及  $\mathbf{J}'_{k+1}$  代入式(1-3), 并利用逆矩阵引理, 可得 Fisher 信息矩阵

$$\mathbf{J}_{k+1} = (\mathbf{Q}_k + \mathbf{F}_k \mathbf{J}_k^{-1} \mathbf{F}'_k)^{-1} + \mathbf{H}'_{k+1} \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{H}_{k+1} \quad (7)$$

不难发现, 上式与卡尔曼滤波中的误差协方差矩阵递推公式的信息阵形式非常相似。

## 2 量测不确定条件下多传感器离散滤波系统的 CRLB

注意到式(3)中仅有  $\mathbf{J}'_{k+1}$  与量测有关, 因而量测不确定条件下离散线性滤波的 CRLB 的研究重点也就在于对  $\mathbf{J}'_{k+1}$  的求解上。这方面早期的研究主要集中在量测不确定条件下未知确定性静态参数估计的均方误差下限, 文献[2]指出量测不确定条件下参数估计 CRLB 求解中的  $\mathbf{J}_k^Z$ , 在一定条件下等于不存在量测不确定性的  $\mathbf{J}_k^0$  与信息约减因子(IRF)的乘积。文献[2]进一步研究指出: 当目标量测关于目标真实位置对称分布且杂波服从均匀分布时, 量测不确定性的效应可由信息约减因子表示。文献[4]研究了存在量测不确定性时离散线性系统随机状态向量估计的 CRLB, 证明了当各量测分量的观测误差独立同分布时 ( $\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}$ ), 有:

$$\mathbf{J}_{k+1}^Z = q_2(P_D, \lambda, R, V) \mathbf{J}_{k+1}^0 = q_2(P_D, \lambda, R, V) \mathbf{H}'_{k+1} \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{H}_{k+1} \quad (8)$$

其中, 信息约简因子  $q_2 \in [0, 1]$ ,  $P_D$  为探测概率、 $\lambda$  为杂波密度、 $R$  为量测误差协方差阵、 $V$  为波门体积的函数。 $q_2 = 1$  对应于不存在量测不确定性时的情况, 当各量测分量的观测误差具有不同统计特性时, 则有

$$\mathbf{J}_{k+1}^Z = \mathbf{H}'_{k+1} \mathbf{Q}_2(P_D, \lambda, R, V) \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{H}_{k+1} \quad (9)$$

这里,  $\mathbf{Q}_2$  为由对应不同量测分量的信息约简因子组成的对角阵。文献[3]则在上述基础之上将问题推广到多传感器及非线性量测条件下。注意到文献[3]在其推导过程中假设各传感器的观测误差是独立同分布的, 导致各传感器的信息约简因子矩阵  $\mathbf{Q}_2$  均相同, 这是极不现实的。为此, 我们对量测不确定性条件下由多个具有不同观测误差的多个传感器组成的动态滤波估计系统的 CRLB 进行了研究, 给出了更具一般性并对评估多传感器融合跟踪算法具有实际应用价值的研究成果。

考虑  $N$  个传感器,  $\mathbf{Z}_k = \{Z_k^j, j=1, \dots, N\}$  为  $k$  时刻全体量测的集合,  $\mathbf{Z}_k^j = \{Z_k^{i,j}, j=1, \dots, m_k^j\}$  为其中传感器  $j$  的量测集合,  $Z_k^{i,j}$  为传感器  $j$  的第  $i$  个量测,  $m_k^j$  为传感器  $j$  在  $k$  时刻的量测数目。假设传感器  $j$  有如下非线性量测模型:

$$Z_k^{\text{trn}j} = h_j(\mathbf{x}_k, k) + v_k^j \quad (10)$$

传感器  $j$  的量测噪声服从  $v_k^j \sim N(0, R_j)$ , 且有  $R_j = \text{diag}\{(\sigma_j^1)^2, \dots, (\sigma_j^{n_z})^2\}$ , 不同量测分量的量测噪声统计独立, 各传感器的观测维数均假设为  $n_z$ ,  $\forall r=1, \dots, n_z$ ,  $z_k^{r,i,j}$  表示量测  $Z_k^{i,j}$  的第  $r$  个分量。根据式(4), 就有

$$\mathbf{J}_k^Z = E\{-\nabla_{\mathbf{x}_k} \log p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{x}_k)\} \quad (11)$$

式中的均值计算是关于  $\mathbf{Z}_k, \mathbf{x}_k$  以及  $\mathbf{M}_k = [m_k^1, m_k^2, \dots, m_k^N]$  的。由各传感器观测噪声的统计独立性及全概率定理可得

$$\mathbf{J}_k^Z = \sum_{j=1}^N \sum_{m_k^j=1}^{\infty} p(m_k^j) \mathbf{J}_{k,j}^Z(m_k^j; k) \quad (12) \quad \mathbf{J}_{k,j}^Z(m_k^j; k) = E\{-\nabla_{\mathbf{x}_k} \log p(\mathbf{Z}_k^j | \mathbf{x}_k, m_k^j) | m_k^j\} \quad (13)$$

式中均值计算是关于  $\mathbf{Z}_k^j$  和  $\mathbf{x}_k$  的。假设杂波数目服从均值为  $\lambda V_j$  的泊松分布, 且对于一个传感器至多有一个量测为目标真实回波, 则传感器  $j$  有  $m_k^j$  个量测的概率为

$$p(m_k^j) = (1 - P_D) (\lambda V_j)^{m_k^j} \exp(-\lambda V_j) / m_k^j! + P_D (\lambda V_j)^{m_k^j-1} \exp(-\lambda V_j) / (m_k^j - 1)! \quad (14)$$

定义  $\varepsilon(m_k^j)$  为  $m_k^j$  个量测中存在一个目标真实量测的概率, 有

$$\varepsilon(m_k^j) = P_D (\lambda V_j)^{m_k^j} \exp(-\lambda V_j) / (m_k^j - 1)! p(m_k^j) \quad (15)$$

假设杂波在观测空间均匀分布, 则有量测  $Z_k^{i,j}$  为杂波的概率密度函数为  $p_0(Z_k^{i,j}) = (V_j)^{-1}$ ; 由式(10)可得量测  $Z_k^{i,j}$  为目标真实回波的概率密度函数

$$p_0(Z_k^{i,j}) = \prod_{r=1}^{n_z} N(z_k^{r,i,j}; h_j^r(\mathbf{x}_k, k), (\sigma_j^r)^2) \quad (16)$$

由文献[3]可知单传感器  $\mathbf{J}_{k,j}^Z(m_k^j, k)$  矩阵为

$$[J_{k,j}^Z(m_k^i, k)]_{ab} = \sum_{r=1}^{n_z} K_j^r(m_k^i) E \left[ \frac{\partial h_j^r}{\partial x_k^a} \cdot \frac{\partial h_j^r}{\partial x_k^b} \right] \quad (17)$$

式中的均值计算是关于  $x_k$  的,而

$$K_j^r(m_k^i) = \frac{\varepsilon(m_k^i)^2}{(m_k^i)(V_j)^{(m_k^i-2)}(\sigma_j^r)^4} \int_{\tilde{z}_k^{m_k^i, j} \in A_j'} \dots \int_{\tilde{z}_k^{1, j} \in A_j'} \frac{(\tilde{z}_k^{r, 1, j})^2 N(\tilde{z}_k^{i, j}; 0, R_j)}{\left[ (1 - \varepsilon(m_k^i)) + \frac{\varepsilon(m_k^i) V_j}{m_k^i} \sum_{i=1}^{m_k^i} N(\tilde{z}_k^{i, j}; 0, R_j) \right]} d\tilde{z}_k^{1, j} \dots d\tilde{z}_k^{m_k^i, j} \quad (18)$$

其中,积分变量为  $\tilde{z}_k^{i, j} = (z_k^{i, j} - h_j(x_k, k))$ ,积分区域  $A_j' = [-g\sigma_j^1, g\sigma_j^1] \dots [-g\sigma_j^{n_z}, g\sigma_j^{n_z}]$ ,  $V_j = \prod_{r=1}^{n_z} (2g\sigma_j^r)$ ,  $g$  为波门门限。则由式(12)可得

$$[J_k^Z]_{ab} = \sum_{j=1}^N \sum_{m_k^i=1}^{\infty} p(m_k^i) \left[ \sum_{r=1}^{n_z} K_j^r(m_k^i) E \left[ \frac{\partial h_j^r}{\partial x_k^a} \cdot \frac{\partial h_j^r}{\partial x_k^b} \right] \right] = \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^{n_z} q_2^{r, j} \left\{ \frac{1}{(\sigma_j^r)^2} E \left[ \frac{\partial h_j^r}{\partial x_k^a} \cdot \frac{\partial h_j^r}{\partial x_k^b} \right] \right\} \quad (19)$$

其中,  $q_2^{r, j} = (\sigma_j^r)^2 \sum_{m_k^i=1}^{\infty} p(m_k^i)(m_k^i)$  (20)

若定义  $Q_2^j = \text{diag}\{q_2^{1, j}, \dots, q_2^{n_z, j}\}$ , 则式(19)的矩阵形式为

$$J_k^Z = \sum_{j=1}^N E[H_j'(x_k) Q_2^j R_j^{-1} H_j(x_k)] \quad (21)$$

其中,矩阵  $H_j(x_k)$  的第  $(a, b)$  个元素为  $H_j(x_k)_{ab} = \partial h_j^a / \partial x_k^b$ 。若观测模型为线性时不变的,则式(21)中关于  $x_k$  的均值操作可省去,有  $J_k^Z$  和 Fisher 信息阵  $J_{k+1}$  分别为

$$J_k^Z = \sum_{j=1}^N H_j' Q_2^j R_j^{-1} H_j \quad (22) ; \quad J_{k+1} = (Q + F J_k^{-1} F')^{-1} + \sum_{j=1}^N H_j' Q_2^j R_j^{-1} H_j \quad (23)$$

不难发现当  $Q_k^j$  为单位阵时,上式就是集中式多传感器融合估计中的误差协方差的递推公式。

### 3 对量测不确定条件下稳态 CRLB 与不同参数的关系的仿真分析

上小节给出了多传感器滤波估计系统的 CRLB,然而在实际系统设计以及资源控制过程中通常采用稳态 CRLB 作为优化控制指标。假设系统是时不变的,则  $D_k^{11}, D_k^{12}, D_k^{22}$ , 均不依赖于  $k$ 。定义  $k$  趋于  $\infty$  时的  $J_k$  为  $J_\infty$ , 则有式(24)。式(24)为离散 Riccati 方程,可用 MATLAB 软件提供的 Daresolv 函数方便地求解  $J_\infty$ 。

$$J_\infty = D_k^{22} - D_k^{21} (J_\infty + D_k^{11})^{-1} D_k^{12} \quad (24)$$

矩阵  $Q_2^j$  中的元素是  $P_D, \lambda, R_j$  及  $V_j$  的函数,本小节对稳态 CRLB 与可能对其造成影响的各参数的关系进行量化分析(如图1-图6所示)。仿真实验在单传感器、二维环境下进行,量测模型是线性的,  $X$  方向和  $Y$  方向的量测误差独立同分布,稳态 CRLB 值取  $X$  方向位置估计误差均方差值的下限,即  $[J_\infty^{-1}]_{11}$ 。

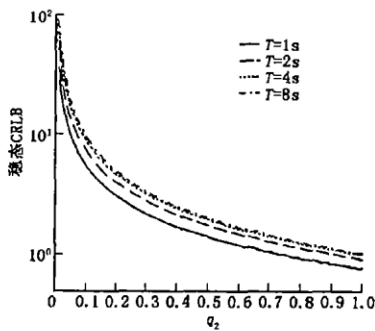


图1 与信息约简因子  $q_2$  关系图  
 $\sigma_v = 1, \sigma_w = 1$

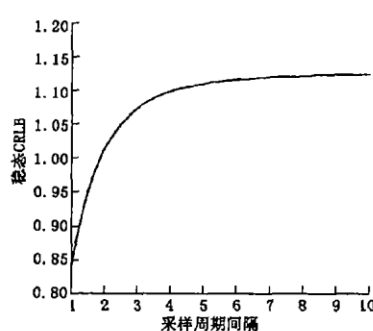


图2 与采样间隔  $T$  关系图  
 $\sigma_v = 1, \sigma_w = 1, P_D = 0.9, \lambda = 10^{-5}, V = 256$

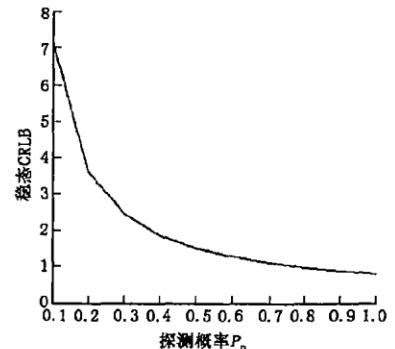
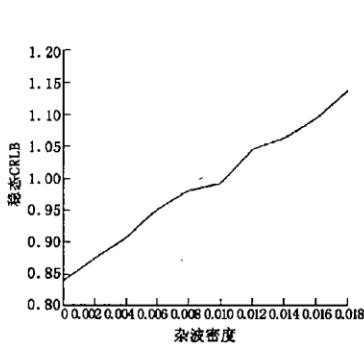
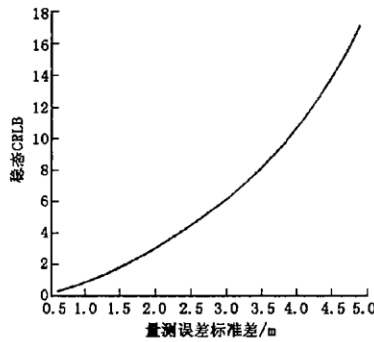


图3 与探测概率  $P_D$  关系图  
 $\sigma_v = 1, \sigma_w = 1, T = 1, \lambda = 10^{-5}, V = 256$



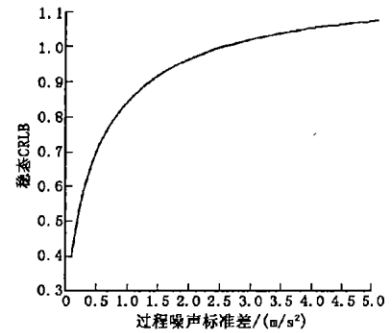
$\sigma_v = 1, \sigma_w = 1, T = 1, P_D = 0.9, V = 256$

图4 与杂波密度  $\lambda$  关系图



$\sigma_v = 1, T = 1, P_D = 0.9, \lambda = 10^{-5}, V = 256$

图5 与量测误差标准差  $\sigma_m$  关系图



$\sigma_v = 1, T = 1, P_D = 0.9, \lambda = 10^{-5}, V = 256$

图6 与过程噪声标准差  $\sigma_w$  关系图

从图1中可见,随着  $q_2$  的增加,稳态 CRLB 就越小。这是因为  $q_2 \leq 1$ , 其效应表现为算法量测噪声的实际方差增加为  $(\sigma_v^2/q_2)$ 。从图2可以看出当  $T$  较小时,稳态 CRLB 值随着  $T$  的增加也有明显增加,但当  $T$  的数值超过一定值后这种增加趋势也逐渐放缓,例如  $T = 4$  s 与  $T = 8$  s 时的稳态 CRLB 值差异已经很小,这一点也可从图1中看出。比较图3和图4可以看出,稳态 CRLB 受探测概率  $P_D$  的影响要较杂波密度  $\lambda$  的来得大。从图5可以看出稳态 CRLB 值随着  $\sigma_m$  的增加而增大,尽管是在杂波环境下,稳态 CRLB 值仍然受到  $\sigma_m^2$  的约束。从图6可以看出与量测噪声对稳态 CRLB 的影响相比,过程噪声对其影响小得多。

需要指出的是,在本小节的研究过程中参考了文献[4]的仿真场景参数设计,但在研究过程中我们发现该文献中所给的稳态 CRLB 与过程噪声标准差关系的仿真结果是错误的,笔者与该文作者就这一问题进行了交流,其更正后的结果与图6几乎完全一致。

参考文献:

[1] Tichvasky P, Muravchik C H, Nehorai A. Posterior Cramér - Rao Bounds for Discrete - Time Nonlinear Filtering[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1999, 46(5): 1386 - 1395.  
 [2] Niu R, Willett P K, Bar - Shalom Y. Matrix CRLB Scaling Due to Measurements of Uncertain Origin[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2001, 49(7): 1325 - 1335.  
 [3] Hernandez M L, Marrs A D, Gordan N J, et al. Cramér - Rao Bounds for non - Linear Filtering with Measurement Uncertainty [A]. Proc. of 5th International Conf. On Information Fusion[C]. Annapolis:2002: 18 - 25.  
 [4] Zhang X, Willett P. Cramér - Rao Bounds for Discrete - Time Linear Filtering with Measurement Origin Uncertainties. In Proc [A]. The Workshop on Estimation[C]. Tracking and Fusion;2001.

(编辑:门向生)

## Study of Cramer - Rao Low Bounds for Discrete - time Filtering System with Measurement Origin Uncertainties

QIAO Xiang - dong<sup>1</sup>, ZHANG Zhi - wei<sup>2</sup>

(1. The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, Shaanxi, China; 2. Aeronautic Equipment Institute, Equipment Academy of Air Force, Beijing 100076, China)

**Abstract:** Cramer - Rao low bound of dissimilar multiple sensors filtering system with measurement origin uncertainties are derived, effects of various parameters on steady state CRLB are analyzed via simulation, and a mistake about these effects in a related foreign literature is pointed out.

**Key words:** discrete time; filtering; performance; low bound