

一种有效解决混合基矩量法积分奇异性的方法

耿方志¹, 常光才², 童创明¹, 王光明¹, 夏冬玉¹, 邓发升¹

(1. 空军工程大学导弹学院, 陕西三原 713800; 2. 陕西省电视台, 陕西西安 710054)

摘要: 三维散射问题通常采用电场积分方程(EFIE)结合矩量法(MOM)来求解, 为了消除基于双线性4边形的混合域基函数在伽列金-矩量法的应用中所出现的积分奇异性, 采用了参数坐标变换、相对坐标变换和奇异值提取相结合的技术, 有效地消除了被积函数中出现的奇异性, 并降低了原4维奇异性积分的维数, 实例计算结果表明, 该处理方法是正确和有效的。

关键词: 矩量法; 混合基函数; 雷达散射截面; 电场积分方程; 积分奇异性

中图分类号: TN957.51 文献标识码: A 文章编号: 1009-3516(2006)03-0065-04

在计算电磁学领域中, MOM(Moment of Method)是处理中低频散射或辐射问题的一种经典方法。80年代初, Smrao等提出了著名的矢量基函数RWG, 使用三角形模型剖分表面计算目标电磁特性^[1], 由于基于该方法的MOM通常要求电尺寸为 $1/10\lambda$ 左右的剖分网格, 若采用基于传统的三角剖分规则, 则生成的网格数目太大, 造成未知数个数太多, 矩阵规模较大, 影响求解速度。本文利用南斯拉夫学者Popovic. B. D提出的双线性4边形剖分物体表面^[2], 基于幂级数函数作为大部分全域基函数的思想, 建立了一种混合域基函数公式, 用于计算各种形状散射体的RCS(Radar Cross Section), 达到减少内存并获得较高计算精度的目的。在对EFIE(Electric Field Integration Equation)进行Galerkin-MOM离散过程中, 遇到了4重数值积分奇异性的问题, 本文主要针对该问题进行了仔细的研究, 最终提出了一种转化处理的方法, 使问题得到了圆满的解决。

1 理论分析

1.1 混合域基函数的展开

用双线性表面来模拟散射体外形, (见图1(a))用矢量多项式表示其参数方程如下:^[2]

$$r(u, v) = \frac{1}{\Delta u \Delta v} \{ r_{11}(u_2 - u)(v_2 - v) + r_{12}(u_2 - u)(v - v_1) + r_{21}(u - u_1)(v_2 - v) + r_{22}(u - u_1)(v - v_1) \} \quad (1)$$

其中, $\Delta u = u_2 - u_1, \Delta v = v_2 - v_1$ 。式(1)整理后可得

$$r(u, v) = r_c + r_u u + r_v v + r_{uv} uv \quad (2)$$

其中

$$r_c = \frac{1}{\Delta u \Delta v} (r_{11} u_2 v_2 - r_{12} u_2 v_1 - r_{21} u_1 v_2 - r_{22} u_1 v_1) \quad (3a)$$

$$r_u = \frac{1}{\Delta u \Delta v} (-r_{11} v_2 + r_{12} v_1 + r_{21} v_2 + r_{22} v_1) \quad (3b)$$

$$r_v = \frac{1}{\Delta u \Delta v} (-r_{11} u_2 + r_{12} u_2 + r_{21} u_1 + r_{22} u_1) \quad (3c)$$

$$r_{uv} = \frac{1}{\Delta u \Delta v} (r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}) \quad (3d)$$

在式(1)中, 双线性表面的矢量参数方程 $r(u, v)$ 及其4个顶点的位置矢量 r_{11}, r_{12}, r_{21} 和 r_{22} 是定义在全局坐标系上的, 见图1(a); 变量 u, v 是定义在经变换后的局部坐标系上, 定义 $u_1 = -1, v_1 = -1, u_2 = 1, v_2 = 1$ 是局部坐标系中4边形各边的起点与终点坐标, 见图1(b)。由式(2)所表征的双线性4边形矢量参数方程

收稿日期: 2005-05-17

基金项目: 空军工程大学学术基金资助项目(KGD-XL02-2004-02)

作者简介: 耿方志(1978-), 男, 山东惠民人, 博士生, 主要从事电磁场数值计算研究;

童创明(1964-), 男, 湖北黄冈人, 教授, 博士生导师, 主要从事电磁散射与辐射、电磁场数值计算研究;

王光明(1964-), 男, 安徽砀山人, 教授, 博士生导师, 主要从事电磁散射与辐射、电路与系统研究。

可唯一确定^[2]。基于该双线性表面近似单元,其电流密度基函数形式定义为

$$\mathbf{J}^\xi = \sum_{j=1}^{M_v} \sum_{i=1}^{M_u} a_{ij}^\xi \omega_{ij}^\xi(u, v) \quad (4)$$

式中: ξ 为 u 或 v 分量; M_v, M_u 分别为沿 v, u 坐标近似时的阶数; a_{ij}^ξ 是电流系数。选择幂级数作为基函数,令 $f_i(u) = u^{i-1}, h_j(v) = v^{j-1}$,提出一种基于该幂级数基函数的自动满足边界电流连续条件的混合基函数,在剖分单元内部应用全域基,以提高运算速度;对于两相邻单元的交线处,应用分域基以满足电流连续性方程,以 u 分量混合基函数为例,有

$$\omega_{ij}^\xi(u, v) = (f_i(u) + a_i u + b_i) h_j(v) \quad (5)$$

$$\text{式中,系数 } a_i = \begin{cases} -0.5, & (i < 3) \\ 0.5[(-1)^{i-1} - 1], & (i \geq 3) \end{cases}; \quad b_i = \begin{cases} 0.5(-1)^i, & (i < 3) \\ 0.5[(-1)^i - 1], & (i \geq 3) \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{稍加整理,得混合基函数 } \mathbf{J}^u = \sum_{j=1}^{M_v} \sum_{i=1}^{M_u} a_{ij}^u (u^{i-1} + a_i u + b_i) v^{j-1} \quad (7)$$

$$\text{同理,可得 } v \text{ 分量混合基函数 } \mathbf{J}^v = \sum_{i=1}^{M_v} \sum_{j=1}^{M_u} a_{ij}^v (v^{j-1} + a_j v + b_j) u^{i-1} \quad (8)$$

1.2 阻抗矩阵的建立

由理想导体边界条件,建立 EFIE

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^s = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i \quad (9)$$

其中散射场用位函数表示为

$$\mathbf{E}^s = -\text{grad}V - j\omega\mathbf{A} \quad (10)$$

标量位和矢量位分别为

$$V = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \rho_s g(R) ds = \frac{-1}{j\omega\epsilon_0} \int_S \nabla_s \cdot \mathbf{J}_s g(R) ds \quad (11)$$

$$\mathbf{A} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_s g(R) ds \quad (12)$$

将式(11)和(12)代入到式(10),可到散射场为

$$\mathbf{E}^\xi = L(\mathbf{J}^\xi) = -j\beta\eta_0 \left\{ \int_S (\mathbf{J}^\xi g(R) + \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}^\xi}{k_0^2} \nabla g(R)) dS \right\} \quad (13)$$

将式(9)按 Galerkin - MOM 离散化为矩阵方程^[3],并结合式(13),得

$$[\mathbf{Z}_{kl}^{\xi\xi}][\mathbf{A}_l^\xi] = [\mathbf{V}_k^\xi] \quad (14); \quad \begin{cases} \mathbf{Z}_{kl}^{\xi\xi} = \langle \mathbf{J}_k^\xi, L(\mathbf{J}_l^\xi) \rangle \\ \mathbf{V}_k^\xi = \langle \mathbf{J}_k^\xi, \mathbf{E}^i \rangle \end{cases} \quad (15)$$

式(14)、(15)中 ξ, ζ 分别表示 u 或 v 分量。按照不同的耦合方式,式(14)具体展开,有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{kl}^{uu} & \mathbf{Z}_{kl}^{uv} \\ \mathbf{Z}_{kl}^{vu} & \mathbf{Z}_{kl}^{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_l^u \\ \mathbf{A}_l^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_k^u \\ \mathbf{V}_k^v \end{bmatrix} \quad (16)$$

由式(15)可得阻抗矩阵元素为

$$\mathbf{Z}_{kl}^{\xi\xi} = \int_S \mathbf{J}_k^\xi \cdot L(\mathbf{J}_l^\xi) dS' = -j\beta\eta_0 \left\{ \int dS_k \left[(\mathbf{J}_k^\xi \cdot \mathbf{J}_l^\xi - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}_k^\xi \nabla' \cdot \mathbf{J}_l^\xi}{\beta^2}) g(R) \right] dS_l \right\} \quad (17)$$

式中, $g(R) = \exp(-j\beta R)/4\pi R$ 为自由空间格林函数, β 为传播常数, η_0 为空间波阻抗。

1.3 积分奇异性的处理

由式(17)可得阻抗矩阵的所有元素,经整理可知式(17)是由4重积分组合而成,而且都有共同的4重积分式

$$S_{i_m, j_m, i_n, j_n} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_m^{i_m-1} v_m^{j_m-1} u_n^{i_n-1} v_n^{j_n-1} g(R) du_n dv_n du_m dv_m \quad (18)$$

上式中, i_m, j_m 和 i_n, j_n 分别表示第 m 个和第 n 个剖分单元上 u, v 分量的电流近似阶数,源点到场点距离的模

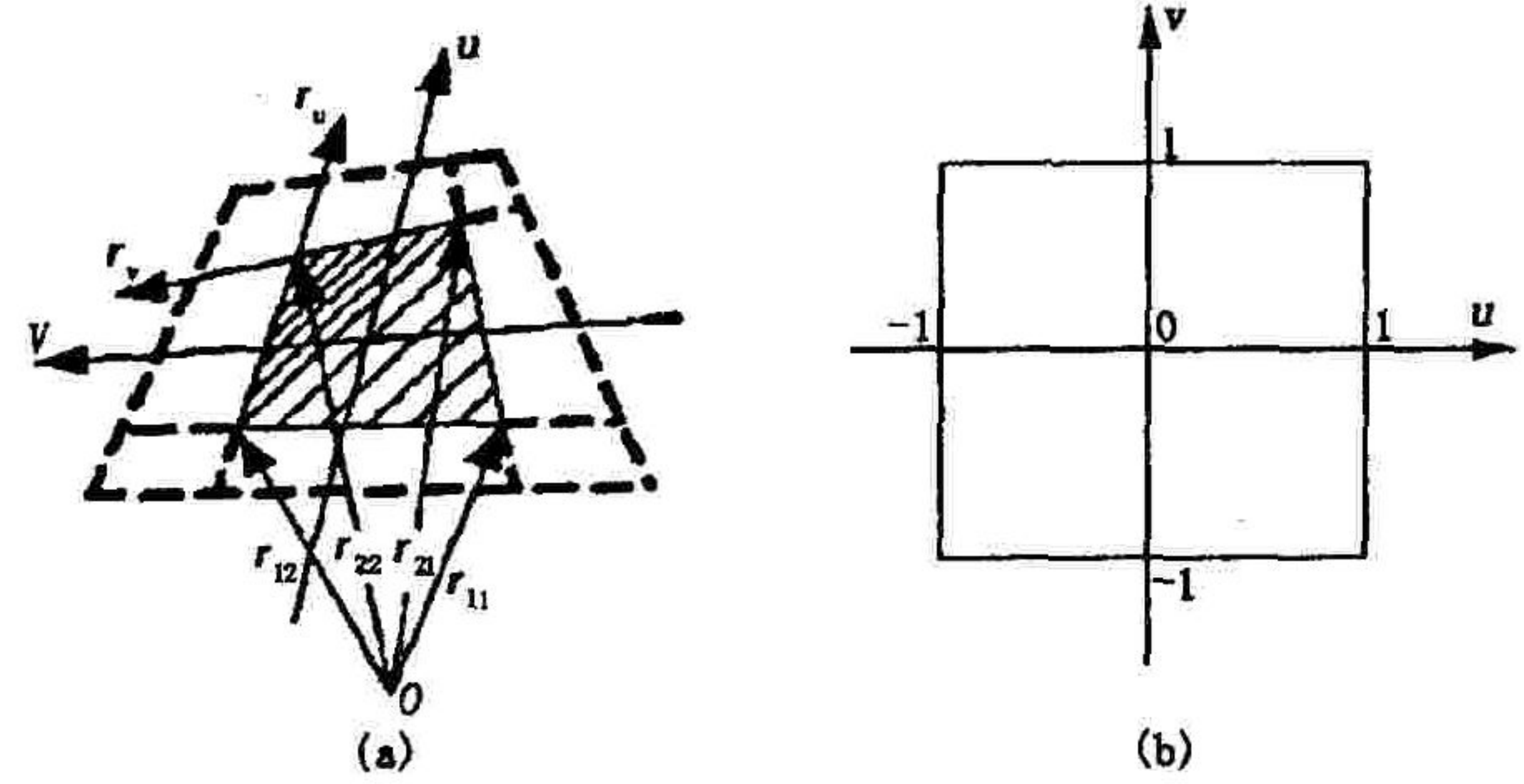


图1 双线性4边形的定义及其等效形式

值为 $R = |r_m - r_n|$, 可见:

1) 当 $m \neq n$ 时, $R \neq 0$, 式(18) 无奇异性;

2) 当 $m = n$ 时, $R = |r_m - r_n| = |r_{um}(u_m - u_n) + r_{vm}(v_m - v_n) + r_{wm}(u_m v_m - u_n v_n)|$, 此时, 若源点与场点重合, 则 R 为零, 此时必须考虑奇点问题。

将 $g(R) = \exp(-j\beta R)/4\pi R$ 代入式(18) 中, 并构造如下积分式

$$S_{i_m j_m, i_n j_n} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_m^{i_m-1} v_m^{j_m-1} u_n^{i_n-1} v_n^{j_n-1} \left[\frac{\exp(-j\beta R) - 1}{4\pi R} + \frac{1}{4\pi R} \right] du_n dv_n du_m dv_m = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_m^{i_m-1} v_m^{j_m-1} \left[u_n^{i_n-1} v_n^{j_n-1} \frac{\exp(-j\beta R) - 1}{R} + u_m^{i_m-1} v_m^{j_m-1} \frac{1}{R} \right] du_n dv_n du_m dv_m \quad (19)$$

在式(19) 中, 中括号里第一项成为可去奇点积分, 可以用正常的4重数值积分来计算; 而对于中括号内的第二项, 则要进行特殊处理: 令该部分的4重积分为 $S_{i_m j_m, i_n j_n}^{(2)}$ 则有

$$S_{i_m j_m, i_n j_n}^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_m^{i_m-1} v_m^{j_m-1} u_n^{i_n-1} v_n^{j_n-1} \frac{1}{R} du_n dv_n du_m dv_m = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u^{i_m+i_n-2} v^{j_m+j_n-2} \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{R} du_n \right) dv_n du_m dv_m \quad (20)$$

由于 R 是 u_m, u_n, v_m, v_n 的函数, 所以单独先给 $\frac{1}{R}$ 进行 u_n (或 v_n) 的单重积分, 将4重积分 $S_{i_m j_m, i_n j_n}^{(2)}$ 转化为3重积分。对于式(20) 中括号内的单重积分, 为了应用方便, 应用以下代换式^[2] $s_i = \beta e_u u_i (i = 1, 2), s_0 = \beta e_u u_0, d_u = \beta e_u d_u, R_0 = \beta r$, 且 $R = e_u \sqrt{(u - u_0)^2 + d_u^2}$, 其中, $e_u = |e_u| = \left| \frac{\partial r(u, v)}{\partial u} \right|$ 为 u 分量拉莫系数, u_0, d_u 是针对 u 分量而引入的变系数, 则单重积分为

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{R} du_n = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{R} du_n = \frac{1}{e_u} \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{R_0} ds = \frac{1}{e_u} \ln \left(\frac{s_2 - s_0 + R_{02}}{s_1 - s_0 + R_{01}} \right) = \frac{1}{e_u} \ln \left(\frac{\sqrt{(1 - u_0)^2 + d_u^2} + (1 - u_0)}{\sqrt{(1 + u_0)^2 + d_u^2} - (1 - u_0)} \right) \quad (21)$$

$$\text{式中, 系数 } u_0 = \frac{1}{e_u} (r - r_c - r_v v_n) \cdot (r_u + r_w v_n), d_u^2 = \frac{|r - r_c - r_v v_n|^2}{e_u^2} - u_0^2, e_u = |r_u + r_w v_n| \quad (22)$$

将式(22) 代入到式(21) 中, 就可将带奇点的4重积分转化成正常的3重积分, 从而消除奇点的影响。但在对式(20) 的处理过程中, 由于是对 u_n 进行了积分, 所以造成了 u_n, v_n 分量的轻微不对称, 为此再将式(20) 中对 u_n 的单重积分按照该方法对 v_n 进行一次单重积分, 最后 $S_{i_m j_m, i_n j_n}^{(2)}$ 的值就是两种情况下值的平均值。

2 计算结果

为了检验对该奇异性积分处理的效果, 采用上述方法, 取近似阶数 $M_u = M_v = 5$, 计算了1个实例的电磁特性来说明其有效性和正确性。

对边长为 L 的正方形平板的单站 RCS 进行仿真^[1,5], 入射波为垂直平板入射的水平极化方式的平面波, 该板被剖分成4个电尺寸为 $L/4$ 的双线性单元, 如图2所示, 黑点为文献[1]或[4]测量结果, 实线为本文计算结果。

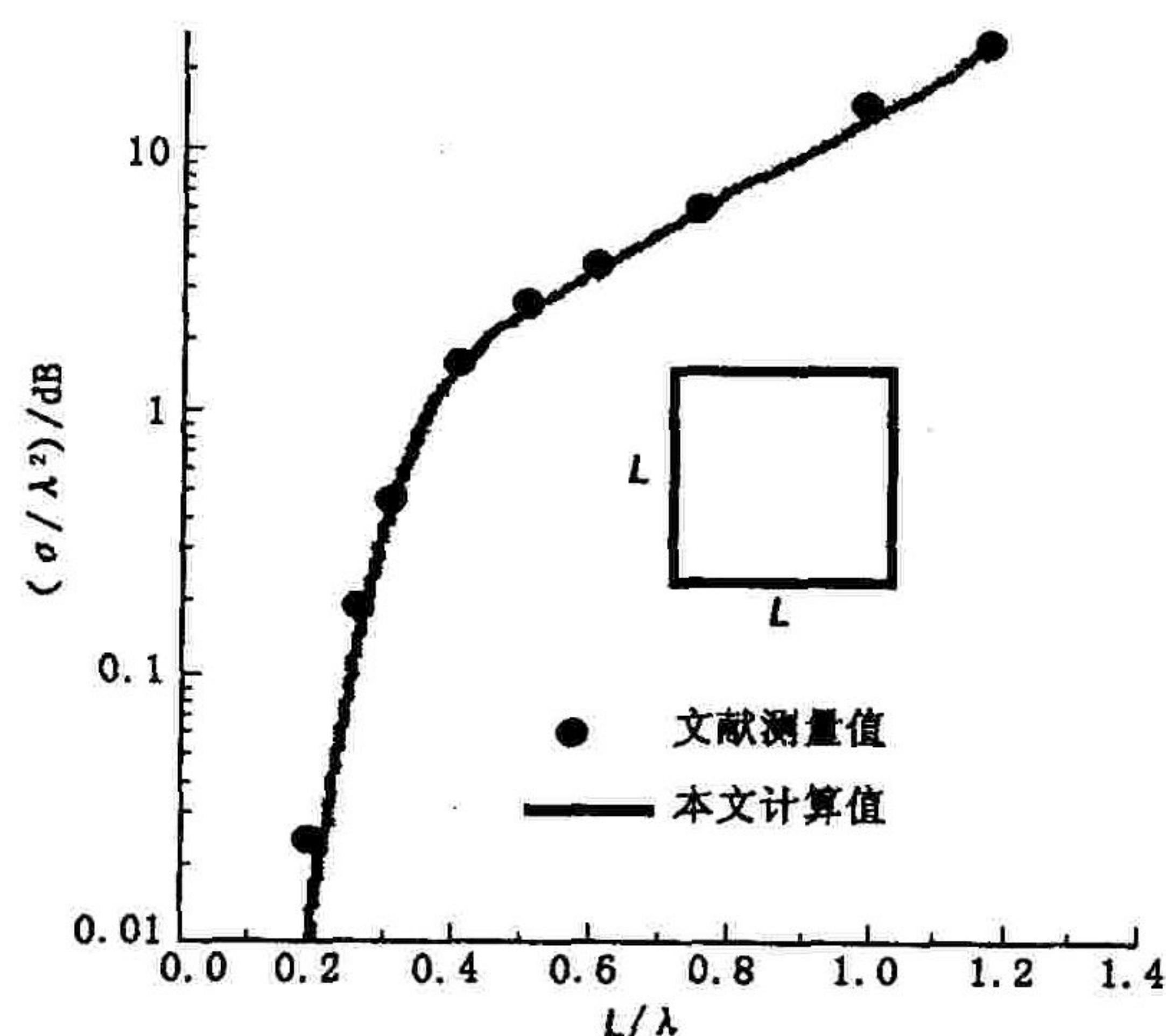


图2 正方形平板单站 RCS 随频率变化图

3 结论

针对求解 EFIE 的 MOM 中基函数^[5] 的特点, 运用了一种基于双线性表面建模的混合域基函数, 着重解决了在求解阻抗矩阵元素过程中所遇到的积分奇异性问题, 本文对此问题采取了分解、转化、综合的处理方法, 经分解后一部分可以进行正常的数值积分, 另一部分经过特殊转化消除了奇异性的影响, 并考虑到了不对称的因素, 最后再经过综合实现了奇异性的解决, 经过大量计算实例的比对验算说明, 该方法行之有效, 能

较好的解决积分奇异性对仿真精度的影响。

参考文献:

- [1] Rao S M, Wilton D R, Glisson A W, et al. Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape [J]. IEEE. Trans. on AP, 1982, 30(3): 409 - 418.
- [2] 波波维奇 B D, 邱景辉. 金属天线与散射体分析 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1999.
- [3] 李世智. 电磁辐射与散射问题的矩量法 [M]. 北京: 电子工业出版社, 1984.
- [4] Wang Nan N, Richmond Jack H, Melvin C. Gilreath. Sinusoidal Reaction Formulation for Radiation and Scattering from Conducting Surfaces [J]. IEEE Trans. on AP, 1975, 23 (3): 376 - 382.
- [5] 耿方志, 童创明, 钞 钢, 等. 基于 Laguerre 展开的时频域同时外推技术 [J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2004, 5 (4): 88 - 90.

(编辑: 田新华)

An Efficient Method of Singular Integrals in Hybrid Basis MOM Solutions

GENG Fang - zhi¹, CHANG Guang - cai², TONG Chuang - ruing¹, WANG Guang - ming¹
XIA Dong - yu¹, DENG Fa - sheng¹

(1. The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China; 2. Shaanxi TV Station, Xi'an Shaanxi 710054, China)

Abstract: The scattering prediction of 3D objects are often treated with EFE - MOM, where the basis function is one of the most important factors affecting the accuracy and efficiency of the method. Double liner quadrangles are used to model the surface of scattering object, a new kind of hybrid basis function based on this quadrangle is presented in this paper, and the RCS is calculated by using this method. The singular integral problems are found in this process, so the main work of this paper is to solve this singular problem. The final result indicates that the method used in this process is correct and efficient.

Key words: MOM; Hybrid basis function; RCS; EFIE; singular integrals

(上接第 60 页)

参考文献:

- [1] 雷英杰. Visual Prolog 语言教程 [M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 2002.
- [2] 雷英杰. Visual Prolog 编程、环境及接口 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2004.
- [3] 雷英杰, 王 涛, 赵 晔. Visual Prolog 的回溯机制分析 [J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2004, 5 (5): 80 - 84.
- [4] 雷英杰, 王宝树, 赵 晔, 等. Visual Prolog 的搜索控制机制分析 [J]. 计算机科学, 2005, 32 (3): 39 - 43.

(编辑: 田新华)

Research on Programming Method with Visual Prolog and Visual C ++

XU Tong, ZHANG Li, LI Song

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

Abstract: Based on analyzing the relationship between domains of Visual Prolog and data types of C language, calling conventions of predicates and functions are discussed, a way to program with Visual Prolog and Visual C ++ is presented, and a code example for this method is demonstrated in detail.

Key words: domain; predicates; DLL; stack