一个随机的定序原理

朱林户， 杨亚莉， 罗秀琴
(空军工程大学 理学院，陕西 西安 710051)

摘　要:将非线性泛函分析中的一般定序原理推广到随机度量空间,得到了一个随机的定序原理;证明了 Ekeland 变分原理和 Caristi 不动点定理的随机推广;统一和推广了文献中的许多结果;得到了一些新的不动点定理。

关键词:随机度量空间;Ekland 变分原理;Caristi 不动点定理
中图分类号:O177　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2005)01-0091-04

概率度量空间(简称为 PM 空间)上已得到了许多不动点定理[1~5],它们都是度量空间中相应结果的推广(PM 空间包含了度量空间[6])。然而迄今为止得到的都是关于压缩型或非膨胀型映象的结果,对于更抽象的不动点定理,如 Caristi 不动点定理,则很难推广到 PM 空间上。在本文中,Bishop、Phelps 和 Browder 所给出的非线性泛函分析中的一般定序原理[7~8],被推广到随机度量空间[9](简称为 RM 空间,是 PM 空间的重要子类);证明了 Ekeland 变分原理[10]和 Caristi 不动点定理[11]的随机推广;统一并推广了文献[1]、[7]、[8]、[10]~[13]中的结论;并得到了一些新的不动点定理。

1　符号约定

(Ω,F,P) 为概率空间, K 为复数域 $\mathbf{C}$ 或实数域 $\mathbf{R}$, $L(\Omega,K)$ 为(Ω,F,P) 上 K -值随机变量之集,且 $L^+(\Omega)=\{x\in L(\Omega,K):x$ 是非负的$\}$。$S(x,y)$为 x 与 y 之间的随机度量。特别地,$(L(\Omega,K),S)$ 是一个 RM 空间,其中 $S(x,y)(\omega)=|x(\omega)-y(\omega)|$。若 $P\{x=y\}=1$,则视 x 与 y 相同。为方便起见,记$(L(\Omega,K),S)=(E_0,S)$, $x\leqslant y$ 表示 $x,y\in E_0$,且 $x\leqslant y$ a. s. 。

2　RM 空间上的 Ekeland 变分原理

引理 1[14]　设$A\subset E_0,a\in E_0,\forall x\in A,a\leqslant x(a\geqslant x)$ 成立。若A 是上可定向的(下可定向的),则存在一个非降序列(非增序列) $\{a_n\}\subset A$ 满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\vee A(\wedge A)$a. s. 。

定理 1　设(E,S) 是以 (Ω,F,P)为基的 RM 空间, $G:R^+\to R^+$是一非降次可加的函数,且 $G(0)=0$;又设存在一个 $\varepsilon>0$ 使得 G 在$[0,\varepsilon]$ 上连续且严格单调增。在 $E\times E_0$上定义半序$\leqslant$:$(x,a)\leqslant(y,b)$ 当且仅当 $G(S(x,y))\leqslant a-b$ a. s. 。若 $M\subset E\times E_0$, M 闭,$A\in F$,$P(A)=1$ 使得 $\forall\omega\in A,\inf\{a(\omega):(x,a)\in M\}>-\infty$,则对每一个 $(y,c)\in M$, M 中存在一个极大元 $(\bar{x},\bar{a})$,使$(y,c)\leqslant(\bar{x},\bar{a})$成立。

证:首先,易证$\leqslant$是 $E\times E_0$上的一个半序。对每个 $(y,c)\in M$,记 $M'=\{(x,a)\in M:(y,c)\leqslant(x,a)\}$。设$\{(y_l,a_l),l\in L\}$ 是 M' 中的一个全序集。由$\leqslant$ 定义可知 $(y_l,a_l)\leqslant(y_s,a_s)$蕴涵 $a_l\geqslant a_s$,从而$\{a_l,l\in L\}$ 是 E_0 中 a. s. 全序集;又由假设知 $\forall\omega\in A,\inf\{a_l(\omega),l\in L\}>-\infty$,因此由引理知$\exists$ $b\in E_0$ 和一个 a. s. 非降序列 $\{a_n\}\subset\{a_l,l\in L\}$,有 $a_n\to b$ a. s. 且 $b\leqslant a_l,\forall l\in L$。由定义知 $G(S(y_n,y_{n+m}))\leqslant a_n-a_{n\times m},\forall m,n\in N$。因此

收稿日期:2004-05-28
基金项目:空军工程大学学术基金资助
作者简介:朱林户(1950-)男,陕西武功人,教授,博士生导师,主要从事概率度量理论及其应用研究.

由 $a_n \to b$ a. s. 知,当 $n\to\infty$ 时,有 $P\{G(S(y_n,y_{n+m})<t)\}\geqslant P\{a_n-a_{n+m}<t\}\to 1,\forall m\in N,\forall t>0$,并由关于 G 的假设知,$n\to\infty$ 时,$P\{G(S(y_n,y_{n+m})<t)\}\to 1,\forall m\in N,\forall t>0$,故 $\{y_n\}$ 是 E 中的一个柯西列,且由 E 的完备性知 $y_n\to\bar{y}\in E$. 因此由 M 闭知 $(\bar{y},b)\in M$。

其次,证明 $(\bar{y},b)$ 是 $\{(y_l,a_l),l\in L\}$ 的上界,即 $G(S(y_l,\bar{y}))\leqslant a_l-b$ a. s. $\forall l\in L$。由假设知,$n\to\infty$ 时,$P\{G(S(y_n,\bar{y}))<t\}\to 1$ $\forall t>0$,因而存在一个子序列(无妨仍记为原序列)$G(S(y_n,\bar{y}))\to 0$ a. s. 。对每一个 $l\in L$,若 $\exists n\in N$, s. t. $(y_l,a_l)\leqslant(y_n,a_n)$,则由 $k\geqslant n$ 可知 $(y_l,a_l)\leqslant(y_k,a_k)$,即 $G(S(y_l,y_k))\leqslant a_l-a_k$;又由引理有 $b\leqslant a_n$,因此 $\forall k\geqslant n$ 有 $G(S(y_l,y_k))\leqslant a_l-b$ 和 $G(S(y_l,\bar{y}))\leqslant G(S(y_l,y_k))+G(S(y_k,\bar{y}))\leqslant G(S(y_k,\bar{y}))+(a_l-b)$。

因而 $G(S(y_l,\bar{y}))\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}G(S(y_k,\bar{y}))+(a_l-b)=a_l-b$,即 $(y,c)\leqslant(y_l,a_l)\leqslant(\bar{y},b)$ 。又若 $(y_n,a_n)\leqslant(y_l,a_l)$ 即 $G(S(y_n,y_l))\leqslant a_n-a_l$ a. s. $\forall n\in N$,则有 $G(S(y_l,\bar{y}))\leqslant G(S(\bar{y},y_n))+G(S(y_n,y_l))\leqslant G(S(\bar{y},y_n))+(a_n-a_l),\forall n\in N$,因而有 $0\leqslant G(S(y_l,\bar{y}))\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}G(S(y_n,\bar{y}))+\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_l)=b-a_l$,另由引理知 $b\leqslant a_l$,所以 $a_l=b,G(S(y_l,\bar{y}))=0$ 因此有 $y_l=\bar{y},(y,c)\leqslant(y_l,a_l)=(\bar{y},b)$ 。故 $\{(y_l,a_l),l\in L\}$ 有上界,由 Zorn 引理知存在一个极大元 $(\bar{x},\bar{a})\in M'$ 且 $(y,c)\leqslant(\bar{x},\bar{a})$ 。若有 $(x^*,a^*)\in M$,使 $(y,c)\leqslant(\bar{x},\bar{a})\leqslant(x^*,a^*)$,则 $(x^*,a^*)\in M'$,因此 $(\bar{x},\bar{a})$ 是 M 的一个极大元。

推论 2.1 设 (E,F,T) 是一个完备的 Menger 空间[9]且 $T\geqslant\mathrm{Min},\Omega=(0,1)$,$F=B(0,1)$,P 为 Lebesgue 测度,G 同定理 1。在 $E\times E_0$ 上定义 $\leqslant$ 如下:$(x,a)\leqslant(y,b)$ 当且仅当 $G(F^{\wedge}_{xy})\leqslant a-b$ a. s. 。其中 $F^{\wedge}(r)=\sup\{t\in R:F(t)<r\},r\in(0,1)$ 。若 $M\subset E\times E_0$ 闭,且存在 $A\in F$ 使 $P(A)=1$,且 $\forall r\in(0,1),\inf\{a(r):(x,a)\in M\}>-\infty$,则对每一个 $(y,c)\in M$,M 中存在一个极大元 $(\bar{x},\bar{a})$,使 $(y,c)\leqslant(\bar{x},\bar{a})$ 成立。

推论 2.2 设 (E,d) 是一个完备的度量空间。记 $F_{xy}(t)=H(t-d(x,y))=\begin{cases}0 & t\leqslant d(x,y)\\ 1 & t>d(x,y)\end{cases}$,则 (E,F,T) 是一个等距同构于 (E,d) [9] 的 Menger 空间。在 $E\times R$ 上定义一个关系 $\leqslant$ 如下:$(x,a)\leqslant(y,b)$ 当且仅当 $G(F^{\wedge}_{xy})=G(d(x,y))\leqslant a-b$。其中 G 同定理 1。若 $M\subset E\times R$ 是闭的,且 $\inf\{a:(x,a)\in M\}>-\infty$,则对每个 $(y,c)\in M$,存在一个极大元 $(\bar{x},\bar{a})\in M$ 使 $(y,c)\leqslant(\bar{x},\bar{a})$。

注:在推论 2.2 中,对每个给定的 $k>0$,取 $G(t)=k\cdot t$,则可得非线性泛函分析中的一般定序原理,即 Bishop - Phelps - Browder 定理[7-8]。

定理 2 取 (E,S) 和 G 同定理 1,假定映象 $J:E\to E_0$ 满足如下条件:对每个 E 中序列 $\{x_n\}$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\to x\in E$,则 $\{x_n\}$ 中存在一个子序列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $J(x)\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\inf J(x_{n_k})$ a. s. 。若存在一个集 $A\in F(P(A)=1)$,使 $\forall\omega\in A$, 有 $\inf\{J(x)(\omega):x\in E\}>-\infty$ 成立,则有 $v\in E$ 使得当 $x\neq v$ 时,有 $A_x\in E,P(A_x)>0$,且对 $\forall\omega\in A_x$,有 $G(S(x,v)(\omega))>J(v)(\omega)-J(x)(\omega)$ 成立。

证:记 $M=\{(x,a)\in E\times E_0:J(x)\leqslant a\}$,证 M 是闭的。若存在一个序列 $\{(x_n,a_n)\}\subset M$ 和 $(x,a)\in E\times E_0$,当 $n\to\infty$ 时,有 $(x_n,a_n)\to(x,a)$。由对 J 的假设知,存在一个子序列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ 满足 $J(x)\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\inf J(x_{n_k})$ a. s. 。另一方面,由 M 的定义有 $J(x_n)\leqslant a_n$, $\forall n\in N$。因此 $J(x)\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\inf J(x_{n_k})\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\inf a_{n_k}$,但 $a_{n_k}\xrightarrow{P}a$,因此存在一个子序列,不妨仍记为 $\{a_{n_k}\}$ 满足 $a_{n_k}\to a$ a. s. ,所以 $J(x)\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\inf J(x_{n_k})\leqslant a$。从而 $(x,a)\in M$,且 M 是闭的。由 J 的假设可见 $\omega\in A$ 蕴涵 $\inf\{a(\omega):(x,a)\in M\}>-\infty$,且 $\forall x\in E$ 有 $(x,J(x))\in M$ (因 $J(x)\leqslant J(x)$)。由定理 1 知 ,对所有的 $w\in E$ 存在一个极大元 $(v,a)\in M$ 使 $(w,J(w))\leqslant(v,a)$. 此外由 M 的定义和 $(v,a)\in M$ 得 $J(v)\leqslant a$. 因此 $G(S(v,v))=0\leqslant a-J(v)$, 即 $(v,a)\leqslant(v,J(v))$. 从而由 (v,a) 是 M 的极大元知 $(v,a)=(v,J(v))$。所以对 $\forall x\in E$, $x\neq v$ 存在 $(v,J(v))\in M$,且 $(v,J(v))\not\leqslant(x,J(x))$,即存在 $A_x\in F(P(A_x)>0)$ 对任意 $\omega\in A_x$ 有 $G(S(x,v)(\omega)\ >J(v)(\omega)-J(x)(\omega)$ 成立。

注:若映象 J 是连续的,则存在一个序列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$,当 $k\to\infty$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 时有 $J(x_{n_k})\to J(x)$ a. s. 成立。因而 J 满足定理 2 中的条件。

用类似于推论 2.1 的方法,可得以下结论。

推论 2.3 设 (E,F,T),E 和 G 同推论 2.1,J 同定理 2,则存在 $v\in E$,对任意的 $x\neq v,A_x\in F(P(A_x)>0)$ 和 $r\in A_x$ 可得 $G(F^{\wedge}_{xy}(r))>J(v)(r)-J(x)(r)$。

推论 2.4 设 (E,d) 是一个完备的度量空间,$J:E\to R$ 是一个下有界下半连续映象,G 同定理1。则存在一个 $v\in E$,当 $x\neq v$ 时有 $G(d(x,v))>J(v)-J(x)$。

注:在推论2.4中对每个给定的 $k>0$,特取 $G(t)=k\cdot t$,即可得文献[8]中 Ekeland 变分原理。

3 应用

着重考虑定理2在不动点问题中的应用。

定理 3 设 (E,S),G 和 J 同定理2,$f:E\to E$ 使 $G(S(w,fw))\leqslant J(w)-J(fw)$ a.s. , $\forall w\in E$,则 f 在 E 中有不动点。

证:由定理2知,存在 $v\in E$ 对 $\forall x\in E,x\neq v$ 有 $A_x\in F$ 使 $P(A_x)>0$ 且对任意 $\omega\in A_x$,有 $G(S(x,v)(\omega)>J(v)(\omega)-J(x)(\omega)$。记 $x=fv$。若 $v\neq fv$,则有 $A_{fv}\in F(P(A_{fv})>0)$ 且对任意 $\omega\in A_{fv}$,有 $G(S(v,fv)(\omega)>J(v)(\omega)-J(fv)(\omega)$. 另一方面,由关于 f 的假设知,存在 $A_v\in F$ $(P(A_v)=1)$ 且对任意 $\omega\in A_v$,有 $G(S(v,fv)(\omega)\leqslant J(v)(\omega)-J(fv)(\omega)$。记 $A=A_{fv}\cap A_v$,则 $P(A)=P(A_{fv})>0$ 且对任意 $\omega\in A$,$J(v)(\omega)-J(fv)(\omega)<G(S(v,fv)(\omega)\leqslant J(v)(\omega)-J(fv)(\omega)$。矛盾。因此 $v=fv$。即 f 在 E 中有不动点。

注:设 (M,d) 是一个完备的度量空间,$L(\Omega,M)$ 是所有的 M-值随机变量之集。则 $L(\Omega,M)$ 是一个 RM 空间[14]。在定理3中令 $E=L(\Omega,M)$,即可得随机化的 Caristi 不动点定理。此处不要求 E 可分。

易从定理3推得文献[15]中的定理3.1。另有如下结论。

推论 3.1 设 (E,S) 同定理2,$f:E\to E$ 是一个随机压缩映象,即存在 $k\in L^+(\Omega)$ 使 $0\leqslant k<1$ a.s. ,满足 $S(fx,fy)\leqslant k\cdot S(x,y)$ a.s. 对所有的 $x,y\in E$ 成立。则 f 在 E 中有唯一的不动点。

注:1971年,H. Sherwood 文献[12]中证明了完备 E-空间的每个严格压缩映象都有唯一的不动点。这是推论3.1的特例,因为 RM 空间包含 E-空间。

用类似于推论2.1的方法,可得如下推论。

推论 3.2 设 (E,S),E 和 G 同推论2.3中所定义,J 同定理2中所定义,且 $f:E\to E$ 对任意 $x\in E$ 有 $G(F^{\wedge}_{x,fx})\leqslant J(x)-J(fx)$ a.s. 。则 f 在 E 中有唯一的不动点。

在推论3.2中若存在一个常数 $k\in(0,1)$ 满足 $F^{\wedge}_{fx,fx}(t)\geqslant F_{x,y}(t/k)$, $\forall x,y\in E$, $t>0$,则 $F^{\wedge}_{fx,fx}(r)\leqslant k\cdot F^{\wedge}_{x,y}(r)$, $\forall r\in(0,1)$。令 $J(x)=F^{\wedge}_{x,fx}/(1-k)$,则 $F^{\wedge}_{x,fx}\leqslant J(x)-J(fx)$,可见 f 在 E 有唯一的不动点,此即文献[1]中的定理3。

推论 3.3 设 (E,d) 是一个完备的度量空间,$J:E\to R$ 是一个下有界下半连续的映象,且 G 同定理2所定义。若 $f:E\to E$ 对所有的 $w\in E$ 有 $G(d(w,fw))\leqslant J(w)-J(fw)$,则 f 在 E 中有唯一的不动点。

注:特别地,在推论3.3中,取 $G(t)=k\cdot t$, $\forall k>0$,即得文献[9]中的 Caristi 不动点定理。

参考文献:

[1] Sehgal V M, Bharucha - Reid A T. Fixed Points of Contractive Mappings on Probabilistic Metric Spaces[J]. Math Sys Theory, 1972,(6):97 - 102.

[2] Cain G L, Kasriel R H. Fixed and Periodic Points of Local Contraction Mappings on Probabilistic Metric Spaces[J]. Math Sys Theory, 1976,(4):289 - 297.

[3] Hadžić O, A Fixed - point Theorem in Random Normed Spaces[J]. Zbornik Radov Prirod - Mat. Fakult. Novi Sad, 1977,(7):23 - 27.

[4] 张石生. 概率度量空间中映象的不动点定理及应用[J]. 中国科学(A辑),1983,(6):495 - 504 .

[5] Schweizer B, Sklar A. Statistical Metric Spaces, Pacific[J]. J Math, 1960,(10):313 - 334.

[6] Bishop E, Phelps R R. The Support Functional of Convex set[J]. Proc Symp, Pure Math, VII, Convexity, Trans Amer Math. Soc, 1963,27 - 36.

[7] Brezis H, Browder F. A General Principle on Ordered Sets in Nonlinear Functional Analysis[J]. Advances in Math,1976,(21): 355 - 364.

[8] Ekeland I. On the Variational Principle[J]. J Math Anal Appl, 1974,(47):324 - 353.

[9] Caristi J. Fixed - point Theorem For Mappings Satisfying Inwardness Conditions[J]. Trans Amer Math Soc, 1976,(215) 241 -

251.
[10] Schweizer B,Sklar A. Probabilistic Metric Spaces[M]. North - Holland, 1983.
[11] 游兆永,朱林户. 概率度量空间的等距度量化[J]. 中国科学(A 辑),1989,(1):19 - 24.
[12] Sherwood H. Complete Probabilistic Metric Spaces[J]. Z Wahrs Verw Geb,1971,(20):117 - 128.
[13] Hadžić O. A Fixed Point Theorem in Probabilistic Locally Convex Spaces[J]. Rev Roumaine Math Pures Appl, 1979,(5):735 - 744.
[14] 游兆永,朱林户,郭铁信. 一类准赋范线性空间的随机共轭空间[J]. 西安交通大学学报,1991,(3):133 - 134.
[15] 侯友良. 扩张算子的随机不动点与随机的 Caristi 不动点定理[J]. 武汉大学学报(自然科学版),1989,(3):1 - 8.

(编辑:姚树峰)

A Random Ordering Principle

ZHU Lin - hu, YANG Ya - li, LUO Xiu - qing
(The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract: The general ordering principle in nonlinear functional analysis is generalized to random metric spaces and a random ordering principle is given in this paper, the random generalizations of Ekeland's variation principle and Caristi's fixed - point theorem are proved, many previous results are unified and generalized, and some new fixed - point theorems are obtained.

Key words: random metric space; Ekeland's variation principle; Caristi's fixed - point principle

(上接第 59 页)

Performance Evaluation of Ad Hoc Routing Protocols Using ns Simulations

WANG Yu[1,2], DA Xin - yu[1,2], XIANG Jing - lin[2]
(1. The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China; 2. College of Marine Engineering, Northwestern Poly - technical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

Abstract: An Ad hoc network is a collection of wireless mobile nodes dynamically forming a temporary network without the use of any existing network infrastructure or centralized administration. A number of routing protocols have been implemented in this paper. An attempt has been made to compare the performance of two prominent on - demand reactive routing protocols for mobile Ad hoc networks: Dynamic Source Routing (DSR) and Ad Hoc On - Demand Distance Vector Routing (AODV). These simulations are carried out based on the ns network simulator.

Key words: Ad hoc wireless networks; routing protocol; simulation