多目标分层规划问题的最优均衡宽容值序列算法

李炳杰[1,2]， 周宏安[2,3]， 迟晓妮[2]
(1. 空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安 710077;2. 西安电子科技大学 理学院，陕西 西安 710071;3. 陕西理工学院 基础部，陕西 汉中 723001)

摘 要:对多目标分层规划问题的宽容完全分层序列算法做改进,寻求各层次多目标子问题的最优均衡值和最优均衡解,针对上级优先层次对下级层次的宽容值,求出所有层次按优先级顺序的最优均衡解;给出多目标分层规划问题的最优均衡宽容完全分层序列算法,得到在一定宽容限下所有层次的帕雷托(Pareto)最优解。

关键词:多目标分层规划;宽容完全分层序列算法;最优均衡解;帕雷托最优解
中图分类号:O221 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2005)01-0083-04

多目标分层规划又称字典分层优化问题(LSP),它要把多个目标按重要程度分成若干个优先层次,具有主从联盟的分层对策问题就属于该类模型的范畴。求解该类问题时需依次按优先目标逐层求出对应的规划问题的有效解或较好解。比如:分层评价法、分层单纯形法和完全分层序列法等。分层评价法具有一定程度的主观性,分层单纯形法仅适合线性问题,完全分层序列法可得到问题的帕雷托有效解,但对每个层次的多目标子问题还需利用评价法给出最优解。文献[1~3]提出宽容完全分层序列算法对每一优先层的最优值给予适当宽容,即上级层对下级层做出让步,从而放大求解下级层问题的可行域,使各层次目标函数在问题中起到适当的作用,宽容限是根据具体问题酌情而定的,这样可得到问题的较好解。文献[4]对群体决策问题引进了最优均衡解,该方法对求解每个层次的多目标子问题很有用处。文献[5]把单目标积分总极值方法与多目标的分层序列法思想联系起来,提出了相关均值与相关方差概念,文献[5]利用一致佳点分布集列对多目标优化问题给出了一种积分型实现算法。本文受文献[4~7]思想的启发,对多目标分层优化问题的宽容完全分层序列算法做改进,对每个层次的多目标子问题寻求最优均衡值,构造以均衡值为目标函数的子问题,将多目标优化问题化为一个单目标优化问题,层次之间引进宽容值,得到在一定宽容限下满足所有层次的最优解。

1 宽容完全分层序列算法

考虑多目标分层优化问题(LSP)

$$L-\min_{x\in D}\boldsymbol{F}(x)=(\boldsymbol{F}_1(x),\boldsymbol{F}_2(x),\cdots,\boldsymbol{F}_m(x)) \tag{1}$$

其中 $x\in D\subseteq\mathbf{R}^n$, D 是问题(LSP)的可行域。记号“$L-\min$”表示在 D 上对向量目标函数 $\boldsymbol{F}(x)$ 依次按 $\boldsymbol{F}_1(x),\boldsymbol{F}_2(x),\cdots,\boldsymbol{F}_m(x)$ 的优先层次求极小,而 $\boldsymbol{F}_i(x)$ 也是向量目标函数, $\boldsymbol{F}_i(x)=(f_{i1}(x),f_{i2}(x),\cdots,f_{iq_i}(x))$ $(i=1,2,\cdots,m)$,假定 D 有界,目标函数 $F_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$ 在 D 上下半连续。文献[1,2]给出了求解该问题的简单完全分层序列算法,其步聚如下:

1)定义初始可行域 $D^1=D$ 为第一优先层的可行域, $k:=1$;

2)求解问题 $\min\limits_{x\in D^k}\boldsymbol{F}_k(x)$ 得到最优解 x^k 和最优值 $\boldsymbol{F}_k(x^k)$;

收稿日期:2004-06-02
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2003 A09)

作者简介:李炳杰(1963-),男,甘肃会宁人,副教授,博士生,主要从事分布参数最优控制算法研究.

3)如果 $k=m$,输出最优解 $x^*=x^k$和最优值 $F_k(x^k)$;否则,转第 4 步;

4)建立下一层的可行域 $D^{k+1}=\{x\in D^k \mid F_k(x)\leqslant F_k(x^k)\}$,$k:=k+1$,转第 2 步。

该算法能得到问题(1)的有效解,但如果存在某个 $1\leqslant k<m$ 使问题$\min\limits_{x\in D^k}F_k(x)$ 的最优解 x^k惟一存在时。第 $k+1,\cdots,m$ 层次的目标函数将不起任何作用,为使各层次目标函数在问题中都起到适当的作用,可引入宽容完全分层序列算法,即在第 3 步中引入宽容限 $\delta_k>0$,可行域 $D^{k+1}=\{x\in D^k \mid F_k(x)\leqslant F_k(x^k)+\delta_k\}$,这样克服了原算法的缺陷,宽容完全分层序列算法是求解问题(1)的非常实用的算法。

2 最优均衡解

宽容完全分层序列算法中,在给定的可行区域内须求解多目标子问题$\min\limits_{x\in D^k}F_k(x)$,由于目标函数 $F_i(x)$ 也是向量函数,故须引进评价法,但评价法具有一定程度的主观性,本文对同一层次的目标函数认为具有相同的权重,进一步寻找同一层次的帕雷托(Pareto)有效解。对不同权重的情形可按文献[4]的方法做进一步推广。

考虑多目标子问题(p_k)

$$L-\min_{x\in D^k}F_k(x)=(f_{k1}(x),f_{k2}(x),\cdots,f_{kq_k}(x)) \tag{2}$$

定义 1:设 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)\in D_k$,如果存在实数 $s\geqslant 0$ 对任意 $x\in D_k$满足

$$f_{kj}(\bar{x})-f_{kj}(x)\leqslant s \quad (j=1,2,\cdots,q_k) \tag{3}$$

则称 $\bar{x}$ 为问题(P_k)的 s 均衡解,称 s 为均衡值。

不难证明,如果 $\bar{x}$ 为问题(P_k)的 s 均衡解,则对任意 $s'>s$,$\bar{x}$ 为问题(P_k)的 s'均衡解。

定义 2:称 $\overline{G}=\{s \mid f_{kj}(\bar{x})-f_{kj}(x)\leqslant s; x\in D_k, j=1,2,\cdots,q_k\}$ 为 $\bar{x}\in D_k$的均衡集。

定义 3:称 $G=\bigcup\limits_{\bar{x}\in D_k}\overline{G}$为的可行集 D_k的均衡集,其中,$\overline{G}$ 为 $\bar{x}\in D_k$的均衡集。

由定义 1 和定义 2 不难证明下面 2 个结论成立

引理 1:对任意 $\bar{x}\in D_k$,$\overline{G}$ 非空,且存在最小值 $s^*_{\bar{x}}$。对任意 $\bar{x}_1,\bar{x}_2\in D_k$,设其均衡集分别为 $\overline{G}_1$、$\overline{G}_2$,而 $\overline{G}_1$、$\overline{G}_2$的最小值分别为 $\bar{s}_1^*$、$\bar{s}_2^*$。如果 $\bar{s}_1^*\leqslant\bar{s}_2^*$,则 $f_{kj}(\bar{x}_1)\leqslant f_{kj}(x_2)\ (j=1,2,\cdots,q_k)$。

引理 2:对任意 $s_0\in G$,可行集 D_k的均衡集 G 的水平集 $G(s_0)=\{s\in G \mid s\leqslant s_0\}$ 是闭集,均衡集 G 存在最小值 s^*。

定义 4:设 s^*是 G 的最小值,如果 $x^*\in D_k$满足 $f_{kj}(x^*)-f_{kj}(x)\leqslant s^*\ (j=1,2,\cdots,q_k)$,称 $x^*\in D_k$ 是问题(P_K)的 s^*最优均衡解,s^*是问题(P_k)的最优均衡值。

定理 1:设 $f_{kj}(j=1,2,\cdots,q_k)$是凸函数,可行集 D_k是凸集,则由所有 s^*最优均衡解构成的集合是凸集,并且 s^*最优均衡解是问题的 Pareto 最优解。如果 $f_{kj}(j=1,2,\cdots,q_k)$是严格凸函数,则问题(P_k)存在惟一的 s^*最优均衡解。

证明:设 x_1^*,x_2^*是问题(P_k)的 s^*最优均衡解,则对任意 $x\in D_k$,$f_{kj}(x_1^*)-f_{kj}(x)\leqslant s^*$,$f_{kj}(x_2^*)-f_{kj}(x)\leqslant s^*\ (j=1,2,\cdots,q_k)$。由于可行集 D_k是凸集,对任意 $\theta\in(0,1)$、$\theta x_1^*+(1-\theta)x_2^*\in D_k$,并且满足

$$f_{kj}(\theta x_1^*+(1-\theta)x_2^*)\leqslant\theta f_{kj}(x_1^*)+(1-\theta)f_{kj}(x_2^*)\ (j=1,2,\cdots,q_)$$

因此,对任意 $x\in D_k$有

$$f_{kj}(\theta x_1^*+(1-\theta)x_2^*)\leqslant\theta(s^*+f_{kj}(x))+(1-\theta)(s^*+f_{kj}(x))=s^*+f_{kj}(x)$$

显然 $\theta x_1^*+(1-\theta)x_2^*\in D_k$也是问题($P_k$)的 s^*最优均衡解,故 s^*最优均衡解构成的集合是凸集。

如果 x^*是问题(P_k)的 s^*最优均衡解,假设 x^*不是 Pareto 最优解,即对策 x^*是可改进的,则存在 $x_0^*\in D_k$,对任意 $j=1,2,\cdots,q_k$使得 $f_{kj}(x_0^*)<f_{kj}(x^*)$,不妨设 $f_{kj}(x_0^*)-f_{kj}(x^*)=h_j<0$,则 $\forall x\in D_k$,$f_{kj}(x_0^*)+h_j-f_{kj}(x)=f_{kj}(x^*)-f_{kj}(x)\leqslant s^*$,即不等式 $f_{kj}(x_0^*)-f_{kj}(x)\leqslant s^*-h_j$成立,令 $s_0^*=\min\limits_j\{S^*-h_j\}$,显然有 $s_0^*<s^*$。并且,$x_0^*\in D_k$ 是问题(P_k)的 s_0^*均衡解,显然这是矛盾的。故问题(P_k)的 s^*最优均衡解一定是 Pareto 最优解。

如果 $f_{kj}(j=1,2,\cdots,q_k)$ 是严格凸函数,则问题(P_k)存在惟一 s^* 最优均衡解是显然的。

3　最优均衡解的单目标规划及原问题的算法

定理 2:如果问题(P_{kj}):$\min\limits_{x\in D^k} f_{kj}(x)$存在最优目标值 $s_{kj}^*(j=1,2,\cdots,q_k)$,则 x^* 是问题(P_k)的 s^* 最优均衡解的充分必要条件是$(x^*,s^*)\in D_k\times\mathbf{R}_+$是问题$(\overline{P}_k)$

$$\min s \tag{4}$$

$$\text{st}.f_{kj}(x)-s_i^*\leqslant s\quad(j=1,2,\cdots,q_k);(x,s)\in D_k\times\mathbf{R}_+ \tag{5}$$

的最优目标值。

证明:充分性:如果$(x^*,s^*)\in D_k\times\mathbf{R}_+$是问题$(\overline{P}_k)$的最优解,显然,对任意 $x\in D_k$,$f_{kj}(x^*)-s_{kj}{}^*\leqslant s^*$,而 $s_{kj}{}^*\leqslant f_{kj}(x)$,故 $f_{kj}(x^*)-f_{kj}\leqslant s^*$,$x^*$ 是问题(P_k)的 s^* 均衡解。假定存在 $s^{**}\in \mathrm{R}_+$使得 $s^{**}\leqslant s^*$且 x^{**}是问题(P_k)的 s^{**}最优均衡解,则对任意 $x\in D_k$,$f_{kj}(x^{**})-f_{kj}(x)\leqslant s^{**}$,由此可知 $f_{kj}(x)\leqslant x^{**}$,$s_{kj}^*\leqslant s^{**}$,即$(x^{**},s^{**})$满足式(5),由于 x^*是问题$(\overline{P}_k)$的最优解,故 $s^*\leqslant s^{**}$,因此 $s^*=s^{**}$,x^{**}也是问题$(\overline{P}_k)$的最优解,$f_{kj}(x^*)=f_{kj}(x^{**})$。故 x^* 是问题$(\overline{P}_k)$的 s^*最优均衡解。

必要性:如果 s^*是问题(P_k)的 s^*最优均衡解,显然$(x^*,s^*)\in D_k\times\mathbf{R}_+$满足式(5),与充分性的证明方法类似,易证$(x^*,s^*)\in D_k\times\mathbf{R}_+$是问题$(\overline{P}_k)$的最优解。

求解问题(P_k)可归结为求解单目标问题$(\overline{P}_k)$,但要求解问题$(\overline{P}_k)$须先求解 q_k个单目标问题(P_{kj}),这是很不方便的。以下对定理 1 的结论做进一步改进。

引入新数组 $\tilde{x}_{kj}(j=1,2,\cdots,q_k)$,对 $x\in D_k$,$(\tilde{x}_{k1},\tilde{x}_{k2},\cdots,\tilde{x}_{kq_k},s)\in[D_k]^{q_k}\times\mathbf{R}_+$构造单目标问题$(\tilde{P}_k)$

$$\min s+\sum_{j=1}^{q_k}f_{kj}(\tilde{x}_{kj}) \tag{6}$$

$$\text{st}.f_{kj}(x)-f_{kj}(\tilde{x}_{kj})\leqslant s\quad(j=1,2,\cdots,q_k) \tag{7}$$

问题$(\tilde{P}_k)$的可行域所包含的变量个数是 $n(q_k+1)$个。

定理 3:设 $\bar{x}_{kj}^*(j=1,2,\cdots,q_k)$是问题$(P_{kj})$的最优解,$(x^*,\tilde{x}_{k1}^*,\tilde{x}_{k2}^*,\cdots,\tilde{x}_{kq_k}^*,\tilde{s}^*)$是问题$(\tilde{P}_k)$的最优解,则 x^*是问题(P_k)的 s^*最优均衡解,其中

$$s^*=\tilde{s}^*+\max\{f_{kj}(\tilde{x}_{kj}^*)-f_{kj}(\bar{x}_{kj}^*)\} \tag{8}$$

证明:设 x_0^*是问题(P_k)的 s_0^*最优均衡解,只需证明 $s_0^*=s^*$即可。由定理 1 知,(x_0^*,s_0^*)是问题$(\overline{P}_k)$的最优解。故$(x_0^*,\bar{x}_{k1}^*,\bar{x}_{k2}^*,\cdots,\bar{x}_{kq_k}^*,s_0^*)$满足式(7),因此

$$\tilde{s}^*+\sum_{j=1}^{q_k}f_{kj}(\tilde{x}_{kj}^*)\leqslant s_0^*+\sum_{j=1}^{q_k}f_{kj}(\bar{x}_{kj}^*) \tag{9}$$

由于 $f_{kj}(\bar{x}_{kj}^*)=s_{kj}^*$(参见定理 2),由式(8)、(9)知 $s^*\leqslant s_0^*$。由式(7)得 $f_{kj}(x^*)-f_{kj}(\tilde{x}_{kj}^*)\leqslant\tilde{s}^*$,则 $f_{kj}(x^*)-f_{kj}(\bar{x}_{kj}^*)+f_{kj}(\bar{x}_{kj}^*)\leqslant\tilde{s}^*+f_{kj}(\tilde{x}_{kj}^*)$,即

$$f_{kj}(x^*)\leqslant\tilde{s}^*+\{f_{kj}(\tilde{x}_{kj}^*)-f_{kj}(\bar{x}_{kj}^*)\}+f_{kj}(\bar{x}_{kj}^*)$$

由式(8)知 $f_{kj}(x^*)\leqslant\tilde{s}^*+f_{kj}(\bar{x}_{kj}^*)$,即 $f_{kj}(x^*)-f_{kj}(\bar{x}_{kj}^*)\leqslant\tilde{s}^*$,由此可知$(x^*,s^*)$满足式(5),则 $s^*\geqslant s_0^*$,因此 $s^*=s_0^*$。

由定理 3 知,求解问题(P_k)可归结为求解单目标问题$(\tilde{P}_k)$,避免了求解 q_k个单目标问题(P_{kj})的麻烦。然而求解问题$(\tilde{P}_k)$并未求出最优均衡值 s^*,但很明显,求解问题(P_k)的目的是求出最优均衡解 x^*而不是最优均衡值 s^*,这一点无关紧要。此外,问题$(\tilde{P}_k)$中增加了变量个数,这不会给算法带来任何不便。由文献[4,5,8]可得到关于多目标分层优化问题的基于最优均衡解的宽容完全分层序列算法,其具体步骤如下:

1)定义初始可行域 $D^1=D$ 为第一优先层的可行域,$k:=1$;

2)求问题$(\tilde{P}_k)$得到最优均衡解,进一步得到问题$\min\limits_{x\in D^k}\boldsymbol{F}_k(x)$的 Pareto 有效解 $x^k=x^*$和最优值 $F_k(x^k)$;

3)如果 $k=m$,输出 x^k 和最优值 $\boldsymbol{F}_k(x^k)(k=1,2,\cdots,m)$。否则,转第 4 步;

4)建立下一层的可行域 $D^{k+1}=\{x\in D^k|F_k(x)\leqslant F_k(x^k)+\delta_k\}$,其中, δ_k 是该层次的宽容值, $k:=k+1$,转第 2 步。

针对多目标分层优化问题,对每层次的多目标子问题通过求解一个单目标优化问题求出与 Pareto 有效解等价的最优均衡解。克服了传统方法的种种局限性,简单实用。

参考文献:

[1] Sawargi Y, Nakayama H. Theory of Multi - Objective Optimization[J]. Mathematics in Science and Engineering, 1985, 17(4): 427 - 235.

[2] 解可新,韩立兴. 最优化方法[M]. 天津,天津大学出版社,2001.

[3] 李炳杰,花文健. 空降兵应急机动通信力量派遣问题的最优化模型[J]. 军事运筹与系统工程,2002, 62 (4): 12 - 15.

[4] 孟志青,胡奇英. 群体决策问题的一种最优均衡解[J]. 系统科学与数学,2004, 24(1): 28 - 33.

[5] 方晓伟,田蔚文. 多目标最优化的一种积分型实现算法[J]. 应用数学与计算数学学报, 2004, 17 (1): 79 - 84.

[6] 姜佩磊. 多目标优化的积分总极值方法[J]. 运筹学杂志, 1990, 9 (1): 69 - 76.

[7] 赵伟光,刘卫江,张 群. 网络设计中集中器定位问题的神经网络解决方法[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2001, 2(5): 62 - 65.

[8] 李炳杰. 一类多阶段决策模型稳定解及最优调节策略[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2002, 3(4): 91 - 94.

(编辑:门向生)

Tolerance Payment Sequence Algorithm of Optimal Equilibrium for Multi - objective Stratified Programming Problems

LI Bing - jie[1,2], ZHOU Hong - an[2,3], CHI Xiao - ni[2]

(1. The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China; 2. School of Science, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China; 3. Shaanxi Institute Technology, Hanzhong, Shaanxi 723001, China)

Abstract: The tolerance algorithm of stratified sequence for multi - objective stratified programming problems is improved. An optimal equilibrium value and some optimal equilibrium solutions are found out for every rank. The optimal equilibrium solutions of all stratified programming problems according to their priority - ranks are got, which is based on the tolerance payment of the superior to the subordinate. The tolerance payment sequence algorithm of optimal equilibrium for multi - objective stratified programming problems is developed, therefore, and Pareto optimum solutions to all the ranks within certain tolerance limits are obtained.

Key words: multi - objective stratified programming; tolerance algorithm of stratified sequence; optimal equilibrium solution; Pareto optimum solution