傅立叶积分算法研究

陈长兴[1]， 高晓光[1]， 刘昌云[2]
(1. 西北工业大学 电子工程系，陕西 西安 710072;2. 空军工程大学 导弹学院，陕西 三原 713800)

摘 要:在信号分析与处理中,常涉及的积分变换是傅里叶变换(FT)、傅里叶级数(FST)、傅里叶Z变换(FZT)及离散付里叶变换(DFT)。通过分析FT与FST、FZT、DFT的关系,提出一种基于FT计算FST、FZT、DFT的新算法,并通过例子说明这种算法的实用性。

关键词:傅里叶变换;傅里叶级数;Z变换;离散付里叶变换
中图分类号:TN911 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2003)06-0074-04

在信号分析与处理中,主要涉及四类常用信号:连续信号、连续周期信号、离散信号及离散周期信号,通常对这四类信号采用不同的积分变换来分析,即对连续信号用傅立叶变换FT分析;对连续周期信号用傅立叶级数(也可看成一种变换)FST分析;对离散信号用傅立叶Z变换FZT分析;对离散周期信号用离散傅立叶变换DFT分析。本文在文献[1]的基础上,通过分析FT与FST、FZT、DFT之间的关系,给出这四种积分变换在形式上的联系及统一,提出了由FT求取FST、FZT及DFT的一种新算法。

一 基于FT的FST、FZT、DFT的求解算法

为讨论方便,引入函数:

冲激序列 $\bar{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$， $\bar{\delta}_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_1)$

时域周期函数 $\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT)$

频域周期函数 $\bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_1)$ T_1、T为周期

改写为 $\bar{F}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(f-nf_1)$ $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ m、n为整数

1.1 FT与FST的关系

设 $f(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} F(f), g(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} G(f)$ 因为 $\bar{\delta}(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \omega_0\delta(\omega) = f_0\delta(f)$[2]

令 $g(t) = T\bar{f}(t) = f(t) * T\bar{\delta}(t)$

则 $G(f) = F(f)\cdot\bar{\delta}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(nf_0)\delta(f-nf_0)$

即
$$T\bar{f}(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(nf_0)\delta(f-nf_0) \tag{1}$$

将式(1)简记为

$$T\bar{f}(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} F(nf_0) \tag{2}$$

收稿日期:2003-03-19
基金项目:国家自然科学基金资助项目(90205019);空军工程大学学术基金资助(2002A17)
作者简介:陈长兴(1964-),男,河北保坻人,副教授,博士生,主要从事信号处理研究;
高晓光(1957-),女,辽宁锦西人,教授,博士生导师,主要从事航空武器效能分析.

这里 $F(nf_0)$ 是模拟冲激序列 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(nf_0)\delta(f-nf_0)$ 的简化形式。

对于周期函数 $\bar{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT)$, $\bar{F}(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(f-nf_1)$,根据泊松时域求和公式[3]知

$$T\bar{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(nf_0)e^{j2\pi nf_0 t},\quad f_0=\frac{1}{T}$$

傅立叶级数系数:

$$F(nf_0)=\int_0^T \bar{f}(t)e^{j2\pi nf_0 t}\mathrm{d}t$$

即

$$T\bar{f}(t)\overset{\mathrm{FST}}{\leftrightarrow}F(nf_0) \tag{3}$$

讨论:

1) 比较式(2) 与式(3) 可发现它们具有相同的形式,即

$$T\bar{f}(t)\leftrightarrow F(nf_0) \tag{4}$$

2) 在这个变换对中,若视 $F(nf_0)$ 为模拟序列,则式(4) 表示为 FT 变换对;若视 $F(nf_0)$ 为数字序列,则式(4) 表示为 FST 变换对;

3) 式(4) 表明由 FT 可求解 FST 或由 FST 求解 FT。

1.2　FT 与 FZT 的关系

设 $f(t)\overset{\mathrm{FT}}{\leftrightarrow}F(f)$, $h(t)\overset{\mathrm{FT}}{\leftrightarrow}H(f)$ 令 $h(t)=f(t)\cdot\bar{\delta}_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(mT_1)\delta(t-mT_1)$

则 $H(f)=F(f)*f_1\bar{\delta}_1(f)=f_1F(f)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-mf_1)=f_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(f-mf_1)=f_1\bar{F}(f)$

即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(mT_1)\delta(t-mT_1)\overset{\mathrm{FT}}{\leftrightarrow}f_1\bar{F}(f) \tag{5}$$

将式(5) 简记为

$$f(mT_1)\overset{\mathrm{FT}}{\leftrightarrow}f_1\bar{F}(f) \tag{6}$$

这里,$f(mT_1)$ 是模拟冲激序列 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT_1)\delta(t-mT_1)$ 的简化形式。

根据泊松时域求和公式[3]并作相应变量代换得

$$f_1\bar{F}(f)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT_1)e^{-j2\pi mT_1 f}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT_1)z^{-m}$$

$$f(mT_1)=\frac{1}{f_1}\int_0^{f_1} f_1\bar{F}(f)e^{j2\pi mT_1 f}\mathrm{d}f \qquad \text{式中 } z=e^{j2\pi fT_1}$$

$$f(mT_1)\overset{\mathrm{FZT}}{\leftrightarrow}f_1\bar{F}(f) \tag{7}$$

讨论:

1) 比较式(6) 与式(7),发现它们具有相同的形式。即

$$f(mT_1)\leftrightarrow f_1\bar{F}(f) \tag{8}$$

2) 在这个变换对中,若视 $f(mT_1)$ 为模拟序列,则式(8) 表示为 FT 变换对;若视 $f(mT_1)$ 为数字序列,则式(8) 表示为 FZT 变换对;

3) 式(8) 表明由 FT 可求解 FZT 或由 FZT 求解 FT。

1.3　FT 与 DFT 的关系

设 $f(t)\overset{\mathrm{FT}}{\leftrightarrow}F(f)$, $y(t)\overset{\mathrm{FT}}{\leftrightarrow}Y(f)$

令 $y(t)=[f(t)*\bar{\delta}(t)]\cdot\bar{\delta}_1(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\bar{f}(mT_1)\delta(t-mT_1)$

则 $Y(f)=[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_0F(kf_0)(kf_0)\delta(f-kf_0)]*[f_1\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(f-pf_1)]=$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} f_1f_0F(kf_0)\delta(f-kf_0-pf_1)$$

这里,$f_0 = \frac{1}{T}$,$f_1 = \frac{1}{T_1}$,取$f_1 = Nf_0$,令$k + pN = N$,则

$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} f_1 f_0 F(kf_0)\delta[f - (k + pN)f_0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} f_1 f_0 F(nf_0 - pf_1)\delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1 f_0 \bar{F}(nf_0)\cdot\delta(f - nf_0)$$

即
$$T_1\sum_{m=-\infty}^{\infty}\bar{f}(mT_1)\delta(T - mT_1) \overset{\mathrm{FT}}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0\bar{F}(nf_0)\cdot\delta(f - nf_0) \tag{9}$$

简记为
$$T_1\bar{f}(mT_1) \overset{\mathrm{FT}}{\leftrightarrow} f_0\bar{F}(nf_0) \tag{10}$$

这里,$\bar{f}(mT_1)$是模拟冲激序列$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT_1)\delta(t - mT_1)$的简化形式,$\bar{F}(nf_0)$是模拟冲激序列$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{F}(nf_0)\delta(f - nf_0)$的简化形式。

设$a[m] = T_1\bar{f}(mT_1)$、$A[n] = \bar{F}(nf_0)$是周期为N的周期序列[3],则$a[m] \overset{N}{\leftrightarrow} A[n]$。

其中,$A[n] = \sum_{m=p}^{p+N-1} a[m]W_N^{mn}$;$a[m] = \frac{1}{N}\sum_{n=r}^{r+N-1} A[n]W_N^{nm}$;$W_N = e^{j2\pi/N}$,$N$为正整数;$p$、$r$为任意整数。

即
$$T_1\bar{f}(mT_1) \overset{N}{\leftrightarrow} \bar{F}(nf_0) \tag{11}$$

讨论:

1) 比较式(10)与式(11),发现两式只相差一个f_0因子;

2) 在式(10)中,若将变换对两边的函数均视为模拟序列,则式(10)表示为FT变换对;若将变换对两边的函数均视为数字序列,则式(10)在取掉f_0因子后表示为DFT变换对。这就是说通过FT可求解DFT变换对[1]。

1.4 FT、FST、FZT、DFT之间的关系

对式(9)进一步分析,可发现其左端是模拟周期信号,按FST展开,其系数A为

$$A = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_1\bar{f}(mT_1)\delta(t - mT_1)e^{j2\pi nf_0 t}\mathrm{d}t$$

令$m = m' + rN$,这里$N = \frac{T}{T_1}$,$f_0 = \frac{1}{T}$有

$$A = \frac{1}{T}\int_0^{NT_1}\sum_{m=-\infty}^{\infty} T_1\bar{f}(mT_1)\cdot\delta(t - mT_1)\cdot e^{-j2\pi nf_0 mT_1}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\sum_{m'=0}^{N-1} T_1\bar{f}(m'T_1)\cdot e^{-\frac{j2\pi m'n}{N}}\cdot e^{-j2\pi rN} = f_0\sum_{m'=0}^{N-1} T_1\bar{f}(m'T_1)\cdot W_N^{-m'n} = f_0\bar{F}(nf_0)$$

即
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} T_1\bar{f}(mT_1)\delta(t - mT_1) \overset{\mathrm{FST}}{\leftrightarrow} f_0\bar{F}(nf_0) \tag{12}$$

简记为
$$T_1\bar{f}(mT_1) \overset{\mathrm{FST}}{\leftrightarrow} f_0\bar{F}(nf_0) \tag{13}$$

再分析式(9),其右端是频域周期函数,按FZT定义,有

$$B = \frac{1}{f_1}\int_0^{f_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0\bar{F}(mf_0)\delta(f - nf_0)e^{j2\pi fmT_1}\mathrm{d}f$$

令$n = n' + rN$,这里$N = \frac{f_1}{f_0}$,有

$$B = \frac{f_0}{f_1}\sum_{n'=0}^{N-1}\bar{F}(n'f_0)e^{-\frac{j2\pi m'n}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n'=0}^{N-1}\bar{F}(n'f_0)W_N^{mn'} = T_1\bar{f}(mT_1)$$

即
$$T_1\bar{f}(mT_1) \overset{\mathrm{FZT}}{\leftrightarrow} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_0\bar{F}(nf_0)\delta(f - nf_0) \tag{14}$$

简记为

$$T_1\bar{f}(mT_1)\overset{\text{FZT}}{\leftrightarrow}f_0\bar{F}(nf_0) \tag{15}$$

讨论:

1) 比较式(10)、(13)、(15) 发现它们具有相同的形式,即

$$T_1\bar{f}(mT_1)\leftrightarrow f_0\bar{F}(nf_0) \tag{16}$$

2)在式(16)中,赋于变换对两边函数不同的含义,其代表不同的变换。当赋于$\bar{f}(mT_1)$,$\bar{F}(nf_0)$ 为模拟序列时,式(11)代表 FT 变换对;当赋于 $\bar{f}(mT_1)$,$\bar{F}(nf_0)$为数字序列时,且取掉变换对右端的f_0 因子,则式(11)代表 DFT 变换对;赋于$\bar{f}(mT_1)$ 为模拟序列,$\bar{F}(nf_0)$为数字序列,则式(11)代表 FST 变换对;赋于$\bar{f}(mT_1)$ 为数字序列,$\bar{F}(nf_0)$ 为模拟序列,则式(11)代表 FZT 变换对。

1.5 结论

综上所述,在一个变换对中,若序列作为变换对的一方,并赋于不同的物理意义(模拟序列或数字序列),则导致变换对代表的意义不同。通过一个变换对,把 FT、FST、FZT 及 DFT 联系起来,提供了通过 FT 计算 FST、FZT、DFT 的一种新途径。由于 FT 的计算方法较多且简单,因此,基于 FT 计算 FST、FZT、DFT 不失为一种有效的新算法。

2 结束语

本文通过分析 FT、FST、FZT、DFT 之间的关系,给出了一种基于 FT 求取 FST、FZT、DFT 的新算法。这种算法的关键是寻找一对合适的 FT 变换对,再由此求取其它的积分变换。FT 的计算方法较多且容易,所以,这种基于 FT 的积分算法不失为一种简单有效的算法。另一方面,若已知$f(t)$,求取其样本值$f(mT_1)$,通过 DFT 的计算求取 $F(\omega)$的样本值 $F(n\omega_0)$(只要 $F(\omega)$的频带足够宽,$F(n\omega_0)\approx\bar{F}(n\omega_0)$ 实现用 DFT 计算$f(t)$的 $F(\omega)$。反之,已知 $F(\omega)$,也可实现用 DFT 计算$f(t)$。同理,由 DFT 也可计算 FST、FZT。

参考文献:

[1] 陈长兴. 离散傅立叶变换的一种新算法[J]. 信号处理,2000,1(3):227-229.
[2] 张有正. 信号与系统[M]. 成都:四川科学技术出版社,1985.
[3] [美]A. 帕波利斯. 信号分析[M]. 北京:海洋出版社,1981.
[4] 刘昌云,陈长兴. 多尺度小波变换在自适应滤波中的应用[J],空军工程大学学报(自然科学版),2002,3(2):50-52.

(编辑:田新华)

Study the Fourier Integral Algorithm

CHEN Chang-xing[1], GAO Xiao-guang[1], LIU Chang-yun[2]

(1. Northwestern Polytechnic University, Xi'an, Shaanxi, 710072, China; 2. Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan Shaanxi, 713800, China)

Abstract: In Linear system, Fourier Transform(FT), Fourier Series(FST), Fourier Z Transform(FZT) and Discrete Fourier Transform(DFT) are used to analyzing and processing signals。In this paper, a new algorithm based on FT has been proposed by analyzing the relationship among FT, FST, FZT and DFT. The practicality of the algorithm is illustrated。

Key words: Periodic sequence, Fourier Transform, Fourier Series, Fourier Z Transform, Discrete Fourier Transform