第4卷第3期　　空军工程大学学报(自然科学版)　　Vol.4 No.3
2003年6月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Jun.2003

一类带有确定隔离期的传染病模型的稳定性分析

李建全[1,2]， 杨友社[2]

(1.西安交通大学 应用数学系，陕西 西安 710049;2.空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安 710077)

摘　要:讨论了一类带有确定隔离期的SIQS传染病模型,确定了各类平衡点存在的阈值条件,通过线性化和构造Liapunov泛函,得到了各类平衡点局部稳定和全局稳定的条件。

关键词:传染病模型;阈值;平衡点;稳定性

中图分类号:O175.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2003)03-0083-04

通过建立数学模型对传染病的传播和控制措施进行研究是应用数学的一个重要研究方向。已有许多国外数学工作者借助微分系统对此方向进行研究,并得到了较好的结果[1-2]。为了控制和降低传染病的传播,对染病者进行隔离是一种常用的措施。文献[3~5]均对此作了一定的研究。他们均假设被隔离者按指数形式恢复而成为易感者或免疫者,所对应的系统是常微分方程。本文将假设被隔离者的隔离时间(隔离期)是一定的,这样与实际更为接近,但所得模型为时滞微分系统,增加了进行研究的难度。

1　数学模型

设总体群分为易感类和染病类,而染病类又由两类个体组成:一类是染病后未被隔离的;一类是染病后被隔离的(这里的隔离不一定是一得病就被隔离)。对由一般病菌引起的传染病,染病者恢复后立即又成为易感者。这正是本文所考虑的情形。

以 $S=S(t)$ 表示易感者在 t 时刻的个体数量,$I=I(t)$ 表示 t 时刻染病而未被隔离的个体数量, $Q=Q(t)$表示 t 时刻染病后被隔离的个体数量,则可得传染病模型

$$\begin{cases} S'=A-\beta SI-dS+\gamma I+\delta e^{-(d+\alpha_2)\tau}I(t-\tau) \\ I'=I[\beta S-(\gamma+\delta+d+\alpha_1)] \\ Q'=\delta I-\delta e^{-(d+\alpha_2)\tau}I(t-\tau)-(d+\alpha_2)Q \end{cases} \tag{1}$$

式中 A 表示对种群的常数输入率,β 表示传染病的传播系数,d 表示种群的自然死亡率, γ 表示传染病的恢复率, α_1 表示染病而未被隔离的个体的因病死亡率, α_2 表示被隔离者的因病死亡率, δ 表示对染病者的隔离率, τ 表示隔离期。

由于系统(1) 中的前2个方程不含有变量 $Q(t)$,因此以下将主要研究系统

$$\begin{cases} S'=A-\beta SI-dS+\gamma I+\delta e^{-(d+\alpha_2)\tau}I(t-\tau) \\ I'=I[\beta S-(\gamma+\delta+d+\alpha_1)] \end{cases} \tag{2}$$

对于系统(2) ,易知 $I(t)=0$ 为其解。这意味着若在某一时刻染病者消失,则疾病也在种群内永远消失,于是以下总假设 $I(t)>0$ 。

收稿日期:2002-10-11
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19971066)
作者简介:李建全(1965-),男,山西万荣人,副教授,博士生,主要从事微分方程定性理论及其应用研究.

2 平衡点及其局部稳定性

直接计算可得:

定理 2.1 记 $R_0=\dfrac{\beta A}{d(\gamma+\delta+d+\alpha_1)}$。点 $P_0(S_0,0)=(\dfrac{A}{d},0)$ 始终是系统(2) 的平衡点(被称为无病平衡点)。当 $R_0>1$ 时系统(2) 还有唯一的正平衡点(被称为地方病平衡点)$P^*(S^*,I^*)$,其中

$$S^*=\frac{\gamma+\delta+d+\alpha_1}{\beta},\qquad I^*=\frac{dS^*}{d+\alpha_1+\delta[1-e^{-(d+\alpha_2)\tau}]}(R_0-1)$$

定理 2.2 系统(2) 的无病平衡点 P_0 当 $R_0<1$ 时是局部渐近稳定的,当 $R_0>1$ 是不稳定的。当 $R_0>1$ 且 $\beta I^*+d>\beta\delta\tau I^*e^{-(d+\alpha_2)\tau}$ 时地方病平衡点 P^* 是局部渐近稳定的。

证 系统(2) 在 P_0 处的线性化系统为

$$\begin{cases}x'=-dx-(\beta S_0-\gamma)y+\delta e^{-(d+\alpha_2)\tau}y(t-\tau)\\ y'=(\gamma+\delta+d+\alpha_1)(R_0-1)y\end{cases}\tag{3}$$

直接讨论系统(3) 的特征值易知,当 $R_0<1$ 时 P_0 是局部渐近稳定的,当 $R_0>1$ 是不稳定的。

系统(2) 在 P^* 处的线性化系统为

$$\begin{cases}x'=-(\beta I^*+d)x-[(d+\alpha_1)+\delta(1-e^{-(d+\alpha_2)\tau})]y-\delta e^{-(d+\alpha_2)\tau}[y(t)-y(t-\tau)]\\ y'=\beta I^*x\end{cases}\tag{4}$$

设

$$V_1=\frac{\beta I^*}{2}x^2+\frac{(d+\alpha_1)+\delta(1-e^{-(d+\alpha_2)\tau})}{2}y^2$$

则

$$\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{(4)}=-\beta I^*(\beta I^*+d)x^2-\beta\delta I^*e^{-(d+\alpha_2)\tau}[y(t)-y(t-\tau)]x=$$

$$-\beta I^*(\beta I^*+d)x^2-\beta\delta I^*e^{-(d+\alpha_2)\tau}x\int_{t-\tau}^{t}dy(u)$$

由系统(4) 中的第 2 个方程有 $\int_{t-\tau}^{t}dy(u)=\beta I^*\int_{t-\tau}^{t}x(u)du$,因此

$$\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{(4)}=-\beta I^*(\beta I^*+d)x^2-\beta^2\delta(I^*)^2e^{-(d+\alpha_2)\tau}\int_{t-\tau}^{t}x(u)du\leqslant$$

$$-\beta I^*(\beta I^*+d)x^2+\frac{\beta^2\delta(I^*)^2e^{-(d+\alpha_2)\tau}}{2}[\tau x^2(t)+\int_{t-\tau}^{t}x^2(u)du]$$

这里用到不等式 $x(t)x(u)\leqslant\dfrac{x^2(t)+x^2(u)}{2}$。

注意到
$$\frac{d}{dt}\int_{t-\tau}^{t}du\int_{u}^{t}x^2(v)dv=\tau x^2(t)-\int_{t-\tau}^{t}x^2(u)du$$

因此设

$$V=V_1+\frac{\beta^2\delta(I^*)^2e^{-(d+\alpha_2)\tau}}{2}\frac{d}{dt}\int_{t-\tau}^{t}du\int_{u}^{t}x^2(v)dv$$

则有

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(4)}\leqslant-\beta I^*[\beta I^*+d-\beta\delta\tau I^*e^{-(d+\alpha_2)\tau}]x^2(t)$$

当 $\beta I^*+d>\beta\delta\tau I^*e^{-(d+\alpha_2)\tau}$ 时,$\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(4)}\leqslant0$。又(0,0) 是系统(4) 在集合 $\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{dV}{dt}=0\right\}$ 上的唯一平衡点,所以依 Lassalle 不变集原理[6],(0,0) 是系统(4)稳定平衡点,即 P^* 是局部渐近稳定的。

3 平衡点的全局渐近稳定性

定理 3.1 对于系统(2) 当 $R_0 \leq 1$ 时无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的，当 $R_0 > 1$ 且 $1 \geq \dfrac{\delta \mathrm{e}^{-(d+\alpha_2)\tau}}{2}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{(\gamma+\delta+d+\alpha_1)}-1}{\gamma+\delta+d+\alpha_1}+\tau\right]$ 时地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的。

证 1)记 $N = S + I + Q$，则由系统(1) 有

$$N' = A - dN - \alpha_1 I - \alpha_2 Q$$

当 I 与 Q 之一为正时，$N' < A - dN$，所以当有染病者存在时，存在充分大的正数 T，使得当 $t > T$ 时有 $N < \dfrac{A}{d}$。因此，当 $t > T$ 时有 $S < \dfrac{A}{d}$。于是当 $t > T$ 时，

$$I' < (\gamma + d + \alpha_1)(R_0 - 1)I$$

所以 $R_0 \leq 1$ 时 $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 0$。结合系统(2) 中的第一个方程可知，$\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = \dfrac{A}{d}$，因此当 $R_0 \leq 1$ 时 P_0 是全局渐近稳定的。

2)作变量代换 $x = S - S^*$，则系统(2) 变为

$$\begin{cases} x' = -(\beta I + d)x - [d + \alpha_1 + \delta(1 - \mathrm{e}^{-(d+\alpha_2)\tau})](I^* - I) - \delta \mathrm{e}^{-(d+\alpha_2)\tau}[I(t) - I(t-\tau)] \\ I' = \beta I x \end{cases} \tag{5}$$

令

$$V_1 = \frac{\beta}{2}x^2 + [d + \alpha_1 + \delta(1 - \mathrm{e}^{-(d+\alpha_2)\tau})](I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*})$$

则

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} = -\beta d x^2 - \beta^2 x^2 I - \beta^2 \delta\, \mathrm{e}^{-(d+\alpha_2)\tau} x[I(t) - I(t-\tau)] = -\beta d x^2 - \beta^2 x^2 I - \beta^2 \delta\, \mathrm{e}^{-(d+\alpha_2)\tau} x \int_{t-\tau}^{t} \mathrm{d}I(u)$$

由于 $I' = \beta I x$，所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} = -\beta d x^2 - \beta^2 x^2 I - \beta^2 \delta\, \mathrm{e}^{-(d+\alpha_2)\tau} x \int_{t-\tau}^{t} I(u)x(u)\mathrm{d}u \leq -\beta d x^2 - \beta^2 x^2 I + \frac{\beta^2 \delta\, \mathrm{e}^{-(d+\alpha_2)\tau}}{2}\left[x^2 \int_{t-\tau}^{t} I(u)\mathrm{d}u + \int_{t-\tau}^{t} I(u)x^2(u)\mathrm{d}u\right]$$

这里用到 $x(t)x(u) \leq \dfrac{x^2(t) + x^2(u)}{2}$。

由系统(2) 中的第二个方程可得：$I' \geq -(\gamma + d + \delta + \alpha_1)I$，因此对于 $t > u > 0$ 有

$$\ln \frac{I(t)}{I(u)} \geq -(\gamma + d + \delta + \alpha_1)(t - u)$$

即

$$I(u) \leq I(t)\mathrm{e}^{(\gamma+d+\delta+\alpha_1)(t-u)}$$

所以对于 $t > \tau$ 有

$$\int_{t-\tau}^{t} I(u)\mathrm{d}u \leq \frac{\mathrm{e}^{(\gamma+d+\delta+\alpha_1)\tau} - 1}{\gamma + d + \delta + \alpha_1} I(t)$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} \leq -\beta d x^2 - \beta^2 x^2 I + \frac{\beta^2 \delta\, \mathrm{e}^{-(d+\alpha_2)\tau}}{2}\left\{\frac{\mathrm{e}^{(\gamma+d+\delta+\alpha_1)\tau} - 1}{\gamma + d + \delta + \alpha_1} x^2 I + \int_{t-\tau}^{t} I(u)x^2(u)\mathrm{d}u\right\}$$

再设

$$V = V_1 + \frac{\beta^2\delta(I^*)^2 e^{-(d+\alpha_2)\tau}}{2}\int_{t-\tau}^{t} du\int_{u}^{t} I(v)x^2(v)dv$$

则有

$$\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{(5)} \leqslant -\beta dx^2 - \beta^2x^2I + \frac{\beta^2\delta e^{-(d+\alpha_2)\tau}}{2}\left[\frac{e^{(\gamma+d+\delta+\alpha_1)\tau}-1}{\gamma+d+\delta+\alpha_1}+\tau\right]x^2I =$$

$$-\beta dx^2 - \beta^2\left\{1 - \frac{\delta e^{-(d+\alpha_2)\tau}}{2}\left[\frac{e^{(\gamma+d+\delta+\alpha_1)\tau}-1}{\gamma+d+\delta+\alpha_1}+\tau\right]\right\}x^2I$$

因此,依 Lassall$e$ 不变集原理,当 $1 \geqslant \frac{\delta e^{-(d+\alpha_2)\tau}}{2}\left[\frac{e^{(\gamma+d+\delta+\alpha_1)\tau}-1}{\gamma+d+\delta+\alpha_1}+\tau\right]$ 时 P^* 是全局渐近稳定的。

参考文献:

[1] Hethcote H W. Qualitative analyses of communicable disease models [J]. Math Biosci,1976,28(3): 335-356.

[2] Hethcote H W, Gao L Q. Disease transmission models with density-dependent demographics [J]. J Math Biol, 1992,30(6): 717-731.

[3] Feng Z, Thieme H R. Recurrent outbreaks of childhood disease revisited: The impact of isolation [J]. Math Biosci, 1995,128 (2): 93-130.

[4] Feng Z, Thieme H R. Endemic with arbitrarily distributed periods of infection, Ⅰ: General theory [J]. SIAM J Appl Math, 2000,61(7): 803-833.

[5] Feng Z, Thieme H R. Endemic models with arbitrarily distributed periods of infection, Ⅱ: Fast disease dynamics and permanent recovery [J]. SIAM J Appl Math, 2000,61(8):983-1012.

[6] Lasalle J P. The stability of dynamical systems. Regional conference series Applied Mathematics [M]. SIAM: Philadelphia, 1976.

[7] 李建全,杨友社. 一类成虫竞争模型的定性分析[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2002,3(2):87-90.

[8] 李建全,杨友社,杨国平. 一类 SIS 流行病传染模型的全局分析[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2002,3(5):88-90.

(编辑:门向生)

An Epidemic Model with Certain Period of Quarantine

LI Jian-quan[1,2], YANG You-she[2]

(1. Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China; 2. The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China)

Abstract: An SIQS epidemic model with certain period of quarantine is discussed in this paper, the conditions and threshold to the existence of various equilibriums are established. By means of linearization and constructing Liapunov functional, the conditions about the locally asymptotic stability and the globally asymptotic stability are obtained.

Key words: epidemic model; threshold; equilibriums; stability