

# 基于飞机空气动力和动力学方程的非线性分析 李雅普诺夫稳定性

税清才, 孙本华

(贵州航空工业集团 飞机设计研究所, 贵州 安顺 561000)

**摘要:**飞机的稳定性是飞行动力学的重要组成部分,基于飞机空气动力和动力学方程的非线性,将李雅普诺夫稳定性分析方法应用于飞机在定常大迎角飞行状态的稳定性分析,该方法克服了小迎角的局限性,在某型号设计中得到了具体的应用。

**关键词:**稳定性;非线性;定常大迎角

**中图分类号:** V231    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1009-3516(2003)03-0012-04

在航空科学发展的早期,飞机的机动性不高,飞行迎角不大,飞机气动力随迎角的变化保持很好的线性。因此,采用定常直线飞行基准状态的小扰动的假设,忽略运动方程的非线性影响,采用气动导数的方法来分析飞机的稳定性。由于这样处理具有方法简单,物理意义明显,模态特性可以按纵、横航向分开处理,在飞行动力学中得到了广泛应用。随着航空科学的进一步发展,越来越强调飞机的机动性、敏捷性。在高机动性飞机的飞行中,如快速滚转、快速拉升或俯冲,大过载盘旋,大迎角状态下气动力的非线性及纵、横向气动力的交叉,动力学方程中非线性因素的影响,是必须要考虑的,Kalviste<sup>[1]</sup>利用飞机纵横向运动模态耦合和气动力非线性的纵横向耦合,给出了预测飞机的稳定域判据,该判据建立在动方向稳定导数和气动力耦合情况下的纵向静稳定导数的基础上。本文的出发点是将飞机从小迎角到大迎角的所有风洞试验6分量静态气动力及阻尼气动力,经静气弹修正后,与全量6自由度动力学方程整合在一个模型中,用于分析某型号飞机在定常大迎角飞行状态下的状态参数空间稳定性,并结合飞机6自由度方程在一定的控制操纵条件下的动态响应,分析稳定状态对扰动的敏感性。

## 1 动力学模型

### 1.1 动力学方程

飞机在空中的运动姿态可用沿机体轴系的如下动力学方程描述<sup>[2]</sup>:

$$V = \left( \frac{p}{m} - \frac{qs}{m} C_x - g \sin \theta \right) \cos \alpha \cos \beta - \left( \frac{qs}{m} C_{y_r} - g \cos \theta \cos \gamma \right) \sin \alpha \cos \beta + \left( \frac{qs}{m} C_x + g \cos \theta \sin \gamma \right) \sin \beta \quad (1)$$

$$\alpha = \omega_x + \left\{ - \left[ \frac{1}{V} \left( \frac{p}{m} - \frac{qs}{m} C_x - g \sin \theta \right) - \omega_y \sin \beta \right] \sin \alpha + \left[ - \frac{1}{V} \left( \frac{qs}{m} C_{y_r} - g \cos \theta \cos \gamma \right) - \omega_x \sin \beta \right] \cos \alpha \right\} \frac{1}{\cos \beta} \quad (2)$$

$$\beta = - \left[ \frac{1}{V} \left( \frac{p}{m} - \frac{qs}{m} C_x - g \sin \theta \right) \sin \beta - \omega_y \right] \cos \alpha + \left[ \frac{1}{V} \left( \frac{p}{m} - \frac{qs}{m} C_{y_r} - g \cos \theta \cos \gamma \right) \sin \beta + \omega_x \right] \sin \alpha + \frac{1}{V} \left( \frac{qs}{m} C_x + g \cos \theta \sin \gamma \right) \cos \beta \quad (3)$$

收稿日期:2002-12-09

基金项目:中航一集团某型号工程项目

作者简介:税清才(1964-),男,重庆綦江人,研究员,主要从事飞机飞行动力学和气动力设计工作。

$$\omega_x = \left[ \frac{qsl}{I_x} \left( m_{x1} + \frac{I_{xy}}{I_y} m_{y1} \right) + \left( \frac{I_y - I_x}{I_x} + \frac{I_{xy}^2}{I_x I_y} \right) \omega_y \omega_z + \left( \frac{I_x - I_z}{I_y} - 1 \right) \frac{I_{xy}}{I_x} \omega_x \omega_z - \left( \frac{I_{xy}}{I_x} \right) \left( \frac{I_p \omega_p}{I_y} \right) \omega_z \right] \frac{1}{\Lambda} \quad (4)$$

$$\omega_y = \left[ \frac{qsl}{I_y} \left( m_{y1} + \frac{I_{xy}}{I_x} m_{x1} \right) + \left( \frac{I_x - I_z}{I_y} - \frac{I_{xy}^2}{I_x I_y} \right) \omega_x \omega_z + \left( \frac{I_y - I_x}{I_x} + 1 \right) \frac{I_{xy}}{I_y} \omega_y \omega_z - \left( \frac{I_p \omega_p}{I_y} \right) \omega_z \right] \frac{1}{\Lambda} \quad (5)$$

$$\omega_z = \left[ \frac{qsb_A}{I_x} m_{z1} + \left( \frac{I_x + I_y}{I_x} \right) \omega_x \omega_y + (\omega_x^2 - \omega_y^2) \frac{I_{xy}}{I_x} + \left( \frac{I_p \omega_p}{I_x} \right) \omega_y \right] \quad (6)$$

式中:  $\Lambda = 1 - I_{xy}^2 / I_x I_y$ 。

### 1.2 运动学方程

$$\vartheta = \omega_y \sin \gamma + \omega_x \cos \gamma \quad (7) \quad \gamma = \omega_x - \tan \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_x \sin \gamma) \quad (8)$$

$$\psi = (\omega_y \cos \gamma - \omega_x \sin \gamma) / \cos \vartheta \quad (9)$$

$$H = V(\cos \alpha \cos \beta \sin \vartheta - \sin \alpha \cos \beta \cos \vartheta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos \vartheta) \quad (10)$$

### 1.3 过载分量

$$n_x = \frac{p}{mg} - \left( \frac{qs}{mg} \right) C_{x1}; \quad n_y = \left( \frac{qs}{mg} \right) C_{y1}; \quad n_z = \left( \frac{qs}{mg} \right) C_{z1} \quad (11)$$

## 2 气动力模型

在飞机体轴系中,飞机的6分量气动力可表示为

$$C_{y1} = C_{y1}(\alpha, \beta) + \Delta C_{y1}(\alpha, \beta, \delta_z) \quad (12) \quad C_{x1} = C_{x1}(\alpha, \beta) + \Delta C_{x1}(\alpha, \beta, \delta_z) + \Delta C_{x1}(\alpha, \beta, \delta_y) \quad (13)$$

$$C_x = C_{x1}(\alpha, \beta) + \Delta C_{x1}(\alpha, \beta, \delta_z) + \Delta C_{x1}(\alpha, \beta, \delta_y) + \Delta C_{x1}(\alpha, \beta, \delta_x) \quad (14)$$

$$m_{x1} = m_{x1}(\alpha, \beta) + \Delta m_{x1}(\alpha, \beta, \delta_z) + \Delta m_{x1}(\alpha, \beta, \delta_y) + \frac{l}{2V} [m_{x1}^{\omega_z}(\alpha, \beta) \omega_x + m_{y1}^{\omega_z}(\alpha, \beta) \omega_y] \quad (15)$$

$$m_{y1} = m_{y1}(\alpha, \beta) + \Delta m_{y1}(\alpha, \beta, \delta_z) + \Delta m_{y1}(\alpha, \beta, \delta_y) + \frac{l}{2V} [m_{y1}^{\omega_z}(\alpha, \beta) \omega_y + m_{x1}^{\omega_z}(\alpha, \beta) \omega_x] \quad (16)$$

$$m_z = m_{z1}(\alpha, \beta) + \Delta m_{z1}(\alpha, \beta, \delta_z) + \frac{b_A}{2V} [m_{z1}^{\omega_z}(\alpha, \beta) \omega_z + m_{z1}^{\alpha}(\alpha, \beta) \alpha] \quad (17)$$

在上述气动力的式子中,由于没有振荡天平 and 旋转天平的测力结果,因此由振荡运动引起的气动力和飞机绕速度轴旋转产生的附加气动力按线性处理。

## 3 李氏稳定性定理

上述动力学方程可简记为非线性自治系统微分方程组:  $\dot{X} = f(X)$ ,  $X \in R^n$  为飞机的运动参数状态向量。

李氏稳定性定理: 设  $\Omega$  为系统原点(平衡解)处的邻域,如果在  $\Omega$  内:

1) 存在一个定正函数  $V(t)$ 。

2)  $V(t)$  沿  $\dot{X} = f(X)$  的解沿轨线对  $t$  全导数是常负的,则系统的平衡解是稳定的。

应用该定理在稳定性分析中,对非线性自治系统构造一个定正函数是困难的,为此,需要将非线性系统在平衡解处展开,写成:  $\dot{X} = AX + g(X)$ ,  $X \in R^n$ , 其中  $A$  为  $f(X)$  在平衡解处的 Jacobi 矩阵,  $g(X)$ ,  $X \in R^n$  为简化系统的高阶项。

根据定理: 如果系统  $\dot{X} = AX$ ,  $X \in R^n$  的 Jacobi 矩阵  $A$  的所有特征值都有负实部,取任意给定的常负二次型  $w(X) = X^T CX$ ,  $X \in R^n$ , 存在定正二次型  $V(X)$ , 使得  $\frac{dV}{dt} = w(X)$ , 且  $V(X)$  是定正的。应用该定理来构造非

线性自治系统的李氏函数:  $\frac{dV}{dt} = (\Delta V, f) = (\Delta V, AX + g(X))$ ,  $X \in R^n$ , 可以证明该李氏函数在平衡解处的邻

域内,  $\frac{dV}{dt} < 0$ , 平衡解处系统  $X = f(X)$  是渐进稳定的<sup>[3]</sup>。

上述证明飞机在平衡解处的稳定性分析可转化为对 Jacobi 矩阵的特征值计算, 这样可通过数值求解来完成。

## 4 算例分析

飞机的平衡解分为定常直线运动(如定常直线平飞、协调侧滑)和定常曲线运动(如正常盘旋, 以一定俯仰角速率进入拉升、俯冲, 或以一定滚转角速率(或滚转角)进入快滚)。根据上面的分析, 首先需要平衡处求解。在飞机的动力学方程中, 令  $X = 0, X \in R^n$ , 求解非线性代数方程组, 该方程组的解即为所需的平衡解。表 1 给出了某型号在低亚音速, 中低空高度稳定机动时的飞行参数, 表 2 给出了对应稳定机动状态的 Jacobi 矩阵特征值。

作为工程应用, 分析在  $H = 1\ 000\text{ m}, Ma = 0.4$  的稳定俯仰机动状态。

按  $\beta + \delta$  轴稳定性指标,  $\beta + \delta$  轴稳定性指标与 Weissman 判据<sup>[2]</sup>在本质上是一样的, 由局部气动导数给出的非平衡状态下大迎角稳定性判据。其定义为由输入引起的初始加速度反应具有在短期内恢复趋势。当有侧滑和横航向操纵输入时, 所引起的初始加速度应在减小侧滑方向。根据风洞试验数据, 图 1 给出了  $H = 1\ 000\text{ m}, Ma = 0.4$  状态的  $\alpha_{-\beta} + \alpha_{\delta}$  图。可以看到, 在该状态飞机的最大稳定迎角为  $20^\circ$  左右

按李氏稳定性定理, 表 2 在稳定俯仰状态出现了一对不稳定的复根, 对应该不稳定根的特征向量(运动参数扰动)是发散的。可以通过有横向操纵输入时解 6 自由度方程仿真, 看其运动参数的变化。图 2 给出了在该平衡状态下副翼右压杆  $20^\circ$  后侧滑角变化的时间历程。从曲线表明, 由副翼输入引起的初始侧滑加速度在  $t < 2\text{ s}$  内使侧滑角发散, 表现出非周期发散而不是振荡发散, 与大侧滑角下的气动力数据由外插给出, 而非试验得到有关。由于李雅普诺夫稳定性的适应性仅限于平衡解处的邻域内, 因此仿真结果与 Jacobi 矩阵的特征值结果是吻合的。从以上分析可以看出, 李雅普诺夫稳定性结果较  $\beta + \delta$  稳定性指标结果小, 就

表 1 稳定机动飞行参数 ( $H = 1\ 000\text{ m}, Ma = 0.4$ )

项目	稳定俯仰	稳定盘旋	定常协调侧滑
$\alpha/(\circ)$	16.70	8.99	3.23
$\beta/(\circ)$	0.00	0.00	-0.67
$\gamma/(\circ)$	0.00	60.00	-1.51
$\vartheta/(\circ)$	16.70	8.99	3.24
$\delta_x/(\circ)$	0.000	0.057	0.243
$\delta_y/(\circ)$	0.000	0.377	1.500
$\delta_z/(\circ)$	-16.40	-6.13	-2.57
$\omega_x/(\circ \cdot \text{s}^{-1})$	0.00	-1.10	0.00
$\omega_y/(\circ \cdot \text{s}^{-1})$	0.00	-3.48	0.00
$\omega_z/(\circ \cdot \text{s}^{-1})$	8.04	6.03	0.00
$n_x$	-0.803	-0.231	-0.005
$n_y$	3.25	2.05	0.92
$n_z$	0.000	-0.002	0.025

表 2 稳定机动状态特征值 ( $H = 1\ 000\text{ m}, Ma = 0.4$ )

稳定俯仰	稳定盘旋	定常协调侧滑
-0.2389 + j - 0.8714	0.0124 + j1.0115	-0.0233 + j - 0.8274
-0.2389 + j0.8714	0.0124 + j1.0115	-0.0233 + j0.8274
0.0415 + j - 1.0451	-0.4029 + j - 0.6391	-0.4723 + j - 0.5103
0.0415 + j1.0451	-0.4029 + j0.6391	-0.4723 + j0.5103
-0.5203 + j0.0000	-0.5690 + j0.0000	-0.5151 + j0.0000
-0.0143 + j - 0.0180	-0.0104 + j - 0.1111	-0.0000 + j0.0000
-0.0143 + j0.0180	-0.0104 + j0.1111	-0.0040 + j0.0000

表 3 稳定机动状态特征值 ( $H = 1\ 000\text{ m}, Ma = 0.75$ )

稳定俯仰	稳定盘旋	定常协调侧滑
-0.6776 + j - 1.5588	-0.9173 + j - 0.9218	-0.8954 + j - 1.0516
-0.6776 + j1.5588	-0.9173 + j0.9218	-0.8954 + j1.0516
-0.0296 + j - 1.8718	-0.1697 + j - 1.4501	-0.2102 + j - 1.3227
-0.0296 + j1.8718	-0.1697 + j1.4501	-0.2102 + j1.3227
-0.9012 + j0.0000	-0.7459 + j0.0000	-0.6621 + j0.0000
-0.0179 + j - 0.0337	-0.0105 + j - 0.0651	-0.0000 + j0.0000
-0.0179 + j0.0337	-0.0105 + j0.0651	-0.0009 + j0.0000

状态飞机的最大可用迎角也只能根据飞机平尾的最大配平能力确定,且在该稳定俯仰状态,由李雅普诺夫稳定性限定,对侧滑扰动应尽量避免。事实上,在飞机试飞中,拉升进入滚转,速度一般要求不低于表速 900 km/h,表 3 给出了在  $Ma = 0.75$  状态的特征值,可以看到所有的特征值均有负实部,具有李雅普诺夫意义上的稳定性。像 F-16 这样的高机动战斗机,尽管飞机可用最大迎角到  $25^\circ$ ,但在机动过程中,当迎角大于  $15^\circ$  后,其飞控系统 中的迎角限幅机构开始工作,防止飞机进入不可控制的偏离姿态,使飞行员进行无顾虑机动<sup>[4]</sup>。

### 5 结束语

飞机的稳定性分析是一项重要的工作,特别是考虑了空气动力和动力学方程的非线性后,加大了分析工作的复杂性,本文提出的方法可以在飞机设计中预先对一些机动飞行进行稳定性分析,为飞机气动设计、试飞参考。

#### 参考文献:

- [1] Kalviste J. Aircraft stability characteristics at high angles of attack[R]. AGARD CP-235,1978.
- [2] 顾诵芬,戈平. 飞机飞行品质计算手册[M]. 北京:航空工业部,1983.
- [3] 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分叉[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,1989.
- [4] William P Gilbert. Simulator study of the effectiveness of an automatic control system designed to improve the high-angle-of-attack characteristics of a fighter airplane[R]. NASS TN D-8176,1976.

(编辑:姚树峰)

## Ляпунов Stability Analysis Based on Nonlinear - Aerodynamic and Nonlinear Equations of Motion of an Aircraft

SHUI Qing - cai ,SUN Ben - hua

(Institute of Aircraft Design & Research, Guizhuo Aviation Industry Corporation, Anshun, Guizhuo 561000, China)

**Abstract:** Stability of the motion of aircraft is an important part of flight dynamics. In this paper, ляпунов stability analysis based on nonlinear - aerodynamic and nonlinear equations of motion of aircraft is applied to the steady flight state of high - angle - of - attack. This method plays an important role in overcoming the limitation of small - angle - of - attack and finds application in an aircraft design.

**Keywords:** stability; nonlinear; steady flight state of high - angle - of - attack

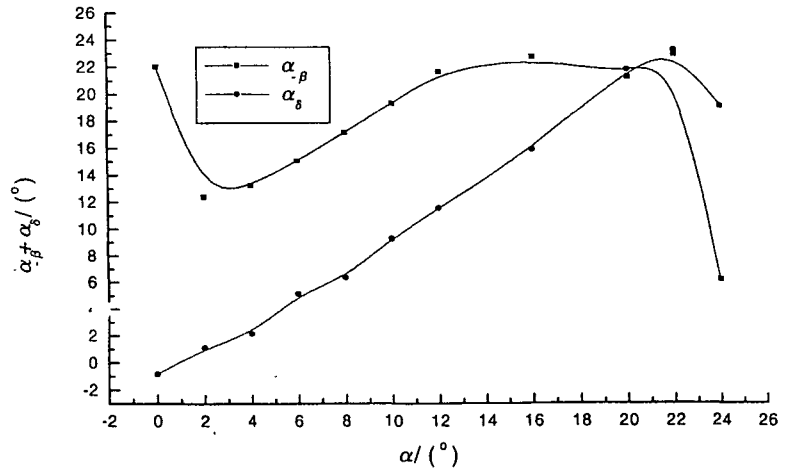


图1  $\alpha_{-\beta} + \alpha_{\delta}$  稳定性指标

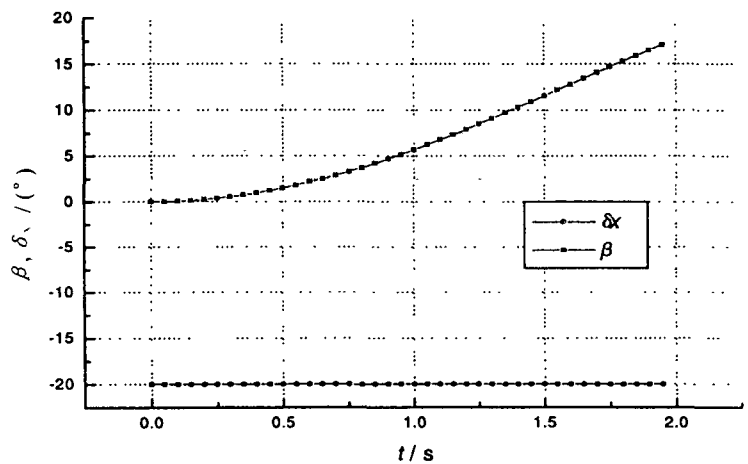


图2 副翼阶跃引起的侧滑变化