第 3 卷第 4 期　　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　　Vol. 3 No. 4
2002 年 8 月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Aug. 2002

受时间约束的运输问题的表上作业法

陈绍顺，　郭乃林，　姜思山
(空军工程大学 导弹学院，陕西 三原　713800)

摘　要:在应急物资保障中,受时间约束的运输问题是十分重要的。结合实际情况,对受时间约束的运输问题进行了探讨。通过分析,对表上作业法进行了改进,提出了最小损失闭回路调整法,并给出了求解的具体步骤,最后用实例进一步说明其应用。

关键词:运输问题;时间约束;表上作业法
中图分类号:TH122　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2002)04-0091-04

1　线性规划中的运输问题

运输问题是线性规划中的一个特例,它以运费最小为目标函数,解决运输计划制定、物资调运中的运费优化问题。用数学语言描述为:

有一批物资由 m 个调出点(以下称发点) $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_m$ 调出,由 n 个接收点(以下称收点) $B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$ 接收,各发点的可供量分别为 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m$,各收点的需求量分别为 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$,从发点 A_i 调运单位物资到收点 B_j 的运价为 c_{ij},现要找一个最优的调运方案。

费用优化运输问题的数学模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

满足:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \cdots, m \tag{3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \tag{4}$$

式中:z——总费用,费用优化运输问题模型的目标函数;

x_{ij}——供应点 i 到需求点 j 的实际供应量。

2　受时间约束的运输问题

在某些紧迫情况下或是出于总体经济利益的考虑,除了要求运费最少以外,对运输时间提出一定的限制,即受时间约束的运输问题。该类问题仍以运费最少(即式(1))为目标函数,除应满足式(2)、(3)和(4)的约束条件外,还应满足时间约束条件:

$$t < T \tag{5}$$

式中:t 时间控制值,即实际调运所需时间;

T 为时间约束值,即调运所允许的最大时间。

对不同的实际问题,各发点的装运事件既可能按一定先后次序进行,具有明显的串联特性,时间控制值 t 等于各发点装运时间的和;也可能同时装运,即并行进行,时间控制值 t 取各发点装运时间中的最大值;还

收稿日期:2001-08-29
作者简介:陈绍顺(1977-),男,湖北武汉人,硕士生,主要从事管理信息系统及辅助决策研究.

可能更为复杂,某些事件并联进行,其余事件串联进行。因此对不同的实际问题,t 的计算方法大为不同。

2.1 受时间约束的运输问题的表上作业法

对传统的运输问题,在总供应量等于总需求量时总有最优解,但受时间约束的运输问题不一定总有满足条件的最优解。

2.1.1 约束时间具有串联特性的运输问题

约束时间具有串联特性的运输问题(如用同一运输工具完成所有运输量),总运距最短(费用最少),即所需时间最短。按传统运输问题的表上作业法进行求解,所得结果若满足时间约束 $t<T$,该解即为满足时间条件的最优解。

若不满足时间约束 $t<T$,则该问题没有解。这是因为用传统运输问题的表上作业法所求的最优解,是费用最小的解,而在具有串联特性的运输问题中,费用最小的解也就是总运距最短的解,即所需的时间最短的解。不满足时间约束 $t<T$,则说明该运输问题的最短时间仍大于时间约束值 T,故该问题无解。

2.1.2 约束时间具有并联特性的运输问题

约束时间具有并联特性的运输问题(即各发点同时开始装运货物),整个调运所需时间 t(约束时间)取决于装运货物所需时间最长的一个发点到收点所需的时间,而各发点到各收点装运货物所需时间只取决于该发点的发量和到收点运输时间 t_{ij}^*。则发点 A_i 到收点 B_j 的调运时间 t_{ij} 为

$$t_{ij}=\max\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{ij}}{K_i}+t_{ij}^*\right)$$

式中 K_i 表示发点 A_i 的装卸速度(这里假设为1),t_{ij}^* 表示从发点 A_i 到收点 B_j 的运输时间。

由于受时间约束的运输问题仍以运费最小为目标函数,因此,先采用传统的运输问题的表上作业法进行求解,若所得结果满足时间约束条件,该解即为最优解;若不满足时间约束条件,即当 $t>T$ 时,可采用"最小损失闭回路法"进行调整,以求得满足时间约束条件 $t\leqslant T$ 的最小费用解。

3 最小损失闭回路调整法

最小损失闭回路调整法是指:用运输问题的表上作业法所求解的结果不满足时间约束条件时,用最小费用损失换取时间超值下降的一种调整法。下面说明最小损失闭回路法的调整步骤:

第1步 列出求解运输问题的运输时间表。

第2步 按照传统的运输问题的表上作业法,计算该运输问题的最小费用。

第3步 计算运输时间 $t=\max t_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots n)$。假如 $t\leqslant T$,则得到最优解,输出结果,结束。否则,进行第4步。

第4步 用最小损失闭回路调整法进行调整。

调整方法如下:首先按照下标从小到大的顺序选取第一个调运时间 t_{ij} 大于时间约束值 T 的项,例如此项为 x_{ij}。然后从所有与基变量 x_{ij} 不在同一行、不在同一列的基变量中选取一个基变量 x_{gh},要求 t_{gi} 和 t_{ih} 不能大于时间约束值 T,并且使得 $c_{gi}+c_{ih}-c_{ij}-c_{gh}$ 的值为最小,即使得式子 $c_{gi}+c_{ih}-c_{ij}-c_{gh}$ 的值在所有与基变量 x_{ij} 不在同一行、不在同一列的基变量中是最小的。

接着令 $\varphi=\min\lfloor x_{ij},x_{gh}\rfloor$

$$\begin{cases}x_{ij}=x_{ij}-\varphi\\x_{ih}=x_{ih}+\varphi\\x_{gh}=x_{gh}-\varphi\\x_{gi}=x_{gi}+\varphi\end{cases}$$

第5步 观察 x_{ij} 是否为0。假如 x_{ij} 为0。则转到第3步;否则转到第4步。

从上面的调整方法可知,闭回路是由两个基变量 x_{ij} 和 x_{gh} 作为对角点所围的一个矩形。其中至少有一个基变量 x_{ij} 是超时点,即 $t_{ij}>T$;而它的对角点(g,h) 是货物调运数大于0的点($t_{gh}>0$)。$C_{gi}+C_{ih}-C_{ij}-G_{gh}$ 可保证每次因降低时间而加上的费用代价是最小的。最小损失闭回路法的主要思想:通过加上最小的费用值以降低运输问题所需的最短时间,从而使其满足时间约束条件 $t\leqslant T$。故当 $t>T$ 时,用最小损失闭回路法进行调整,所得到的解是满足时间约束条件 $t\leqslant T$ 的最小费用解。

4 实例

有 4 个地区（$B1,B2,B3,B4$）急需某种油料，现欲从 4 个油库（$A1,A2,A3,A4$）调运，各地区需要的油量、各油库所能提供的油量，以及从各油库到各地区所需的费用（运价单位：千元/吨）如表 1 所示，从各油库到各地区的时间如表 2 所示。

表 1　单位运价表

	B1	B2	B3	B4	供应量/t
A1	3	11	3	10	30
A2	1	9	2	8	35
A3	7	4	10	5	30
A4	3	2	7	10	20
需求量/t	30	40	20	25	

表 2　运输时间表　t/h

	B1	B2	B3	B4
A1	10	2	8	3
A2	10	3	9	4
A3	6	15	13	4
A4	20	13	9	11

问如何运输才能保证在 40 h 以内将油料以尽可能小的费用送到各地区？

解：首先算出其调运时间表，如表 3 所示，按照传统运输问题的表上作业法所得的最优解如表 4 所示（运量单位：吨）。

表 3　调运时间表　t/h

	B1	B2	B3	B4
A1	40	32	38	33
A2	45	38	44	39
A3	36	45	43	34
A4	40	43	29	31

所算的最小费用为 40 万元。但此方案所需的时间为 $t_{21}=t_{32}=45$ h，不满足时间约束条件，需用最小损失闭回路法进行调整。

表 4　运输问题表上作业法的调运量

	B1	B2	B3	B4	供应量/t	t/h
A1	10		20		30	40
A2	20			15	35	45
A3		20		10	30	45
A4		20			20	33
需求量/t	30	40	20	25		

先按照下标的顺序选取第一个大于 40 h 的 x_{21} 项，对它进行调整。与其不在同一行、不在同一列的基变量有 x_{13}、x_{32} x_{34}、x_{42}。

对于基变量 x_{13}，由于 $t_{23}=44>40$，因而不满足要求。

对于基变量 x_{32}，算得 $c_{22}+c_{31}-c_{21}-c_{32}=9+7-1-4=12$

对于基变量 x_{34}，算得 $c_{24}+c_{31}-c_{21}-c_{34}=8+7-1-5=9$

对于基变量 x_{42}，算得 $c_{22}+c_{41}-c_{21}-c_{42}=9+3-1-2=9$

故可选基变量 x_{42} 对基变量 x_{21} 进行调整。此时 $\varphi=\min(x_{42},x_{21})=20$，调整的结果如表 5 所示（运量单位：吨）。

表 5　经一次调整后的调运量

	B1	B2	B3	B4	供应量/t	t/h
A1	10		20		30	40
A2		20		15	35	39
A3		20		10	30	45
A4	20				20	40
需求量/t	30	40	20	25		

运费增加 18 万元。此时的方案所需的时间仍为 $t_{32}=45$ h，不满足约束条件，继续进行调整。

与基变量 不在同一行、同一列的基变量有 x_{11}、x_{13}、x_{24}和 x_{41}。

对于基变量 ,算得 $c_{12}+c_{31}-c_{11}-c_{32}=11+7-3-4=11$

对于基变量 x_{13},由于 $t_{33}=43>40$,因而不满足要求。

对于基变量 x_{24},算得 $c_{22}+c_{34}-c_{32}-c_{24}=9+5-4-8=2$

对于基变量 x_{41},算得 $c_{31}+c_{42}-c_{32}-c_{41}=7+2-4-3=2$

故选基变量 x_{41}对基变量 x_{32}进行调整。取 $\varphi=\min(x_{41},x_{32})=20$,调整的结果如表 6 所示。

表 6 经二次调整后的调运量

	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$	供应量/t	t/h
$A1$	10		20		30	40
$A2$		20		15	35	39
$A3$	20		10	30	36	
$A4$		20			20	33
需求量/t	30	40	20	25		

运费增加 4 万元。此时方案所需的时间为 $t_{11}=40$ h,满足时间约束条件。

从而表 6 所示的方案可在 40 h 内将油料运到各地区,此时的费用最小为 62 万元。需要指出如果调整的顺序不同,所得的最优解不相同,即最优解不唯一,但算得的最小费用一样。

参考文献:

[1] 运筹学教材编写组. 运筹学(修订版)[M]. 北京:清华大学出版社,1997.

[2] 胡运权. 运筹学基础及应用[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1993.

[3] 李书涛. 决策支持系统原理与技术[M]. 北京:北京理工大学出版社,1996.

[4] 马绍民. 综合保障工程[M]. 北京:国防工业出版社,1995.

(编辑:田新华)

Scheduling Method in Table of Transportation Problem Limited in Time

CHEN Shao - shun, GUO Nai - lin, JIANG Si - san

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

Abstract: The problem of transportation restricted in time in emergent military materiel supply is very important. In this paper, the problem of transportation restricted in time is discussed and the scheduling method in table is improved. By analyzing, adjustment of least cost is put forward and the concrete steps of solving this problem are given. Finally, the practical calculation shows that the method is feasible.

Key words: transportation problem; time restriction; scheduling method in table