一类多阶段决策模型的稳定解及最优调节策略

李炳杰， 张 磊
(空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安 710077)

摘 要:得到一类确定型多阶段决策系统的差分方程组模型及该模型稳定解存在的条件并获得稳定解。同时给出该类模型中未知参数的辩识方法。利用马尔可夫决策方法给出相应随机型模型的稳定解,选择使该系统运行可达到理想状态的最优调节策略。

关键词:差分方程;特征方程;马尔可夫决策;转移概率矩阵
中图分类号:O226 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2002)04-0088-03

1 确定型模型的稳定解及参数辩识

考虑 n 个区域(比如国家或省域)实行开放交流(比如经济,人才,信息等),由于整个体系的约束,每一区域年流入量恰等于其它区域流入该区域的年流出量。记第 t 年区域 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 总流量为 Y_{it},流入量为 X_{it},流出量为 M_{it},流入给 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 区域为 M_{ijt},且与上年区域 的总流量成线性关系。显然,$i=j$ 时,$M_{ijt}=0$,利用文献[1] 区域开放经济趋势模型的理论得到平衡方程

$$\begin{cases} Y_{it}=N_{it}+X_{it}-M_{it} \\ N_{it}=b_i^0+b_iY_{i,t-1} \\ X_{it}=\sum\limits_{j=1}^{n}M_{jit} \\ M_{ijt}=m_{ij}^0+m_{ij}Y_{i,t-1}(j=1,2,\cdots,n) \\ M_{it}=\sum\limits_{j=1}^{n}M_{jit} \end{cases} \tag{1}$$

其中 N_{it}为区域 i 在 t 年流出整个系统的量值(比如,经济模型中称其为消费与投资总额),该量值与上年区域 i 的总流量亦成线性关系。$b_i^0,b_i,m_{ij}^0,m_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 均为正常数。$i=j$ 时, m_{ij}^0,m_{ij}皆为零。

化简平衡方程(1)可导出关于 $Y_{it}(i=1,2,\cdots,n)$ 的线性差分方程组

$$Y_{it}=(b_i-\sum_{j=1}^{n}m_{ij})Y_{i,t-1}+\sum_{j=1}^{n}m_{ji}Y_{j,t-1}+(b_i^0+\sum_{j=1}^{n}m_{ji}{}^0-\sum_{j=1}^{n}m_{ij}{}^0) \tag{2}$$

由差分方程组通解的结构知,如果特征方程

$$\begin{vmatrix} b_1-\sum\limits_{j=1}^{n}m_{ij}-\lambda & m_{21} & \cdots & m_{n1} \\ m_{12} & b_2-\sum\limits_{j=1}^{n}m_{ij}-\lambda & & m_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ m_{1n} & m_{2n} & \cdots & b_n-\sum\limits_{j=1}^{n}m_{ij}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

的所有特征值满足 $|\lambda|<1$,则无论 $t\to\infty$ 时初值如何,总存在稳定解,即区域之间趋于平衡。令 $\overline{Y}_i=\lim\limits_{t\to\infty}Y_{it}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为区域 i 的稳定解,则当$|\lambda|<1$ 时,由差分方程组(2)可知,各区域的稳定解应满足线性代数方程组

收稿日期:2001-10-09
作者简介:李炳杰(1963-),男,甘肃会宁人,副教授,硕士,主要从事计算数学研究.

$$\overline{Y}_i=(b_i-\sum_{j=1}^{n}m_{ij})\overline{Y}_i+\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\overline{Y}_j+b_i^0+\sum_{j=1}^{n}m_{ji}^0-\sum_{j=1}^{n}m_{ij}^0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

求解该方程组,不难求得稳定解 $\overline{Y}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 。

假定 n 个区域 m 年的数据资料已知,参数辩识的目的是确定模型参数 $b_i^0,b_i,m_{ij}^0,m_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$。

如果已知样本资料 $Y_{it},X_{it},N_{it},M_{ijt}(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j,t=1,2,\cdots,m)$,则由方程组(1)中第二和第四式,利用 Mathematic 软件包[2]分别进行数据拟合,不难得出所有参数。但是,实际问题中样本资料往往是残缺的,大多数情况下只给出 $Y_{it}(i=1,2,\cdots,n,t=1,2,\cdots,m)$,此时可变形差分方程组(2)为

$$Y_{it}=A_i+\sum_{j=1}^{n}m_{ji}Y_{j,t-1}+D_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

显然 $A_i,m_{ji}(j=1,2,\cdots,n),D_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的参数辩识可通过最小二乘法获得。由 $A_i=b_i-\sum_{j=1}^{n}m_{ij}$ 可得到 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的辩识。然而由定义 $D_i=b_i^0+\sum_{j=1}^{n}m_{ji}^0-\sum_{j=1}^{n}m_{ij}^0$ 显然无法得到剩余参数的辩识,所幸的是由稳定解的结构(4)可知,无法得到的参数值并不影响稳定解的获得。

2　随机型模型的稳定解及最优调节策略

利用马尔可夫动态系统[3]描述区域之间流量的流入流出及其相应的人为调节量,进一步得到随机型模型的稳定解及最优调节策略。

定义 流量的分布向量 $\boldsymbol{Y}(t)=(Y_{1t},Y_{2t},\cdots,Y_{nt})$,流出系统的向量 $\boldsymbol{N}(t)=(N_{1t},N_{2t},\cdots,N_{nt})$,系统外流入的向量 $\boldsymbol{r}(t)=(r_1(t),r_2(t),\cdots,r_n(t))$。

转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(t)=(p_{ij}(t))_{n\times n}$,其中,$p_{ij}(t)$ 为 t 年流量从区域 i 转移至区域 j 的概率,显然有 $p_{ij}(t)=\frac{M_{ijt}}{Y_{it}}$ 。容易得到

$$\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{Y}(t-1)\cdot\boldsymbol{P}(t-1)+\boldsymbol{r}(t-1) \tag{6}$$

如果假定转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{P}$ (常矩阵),$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}$ (常向量),则有

$$\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{Y}(0)\boldsymbol{P}^t+\boldsymbol{r}\sum_{k=0}^{t-1}\boldsymbol{P}^k \tag{7}$$

定理1:对于给定的流量分布向量 $\boldsymbol{Y}^*=(Y_1^*,Y_2^*,\cdots,Y_n^*)$,当系统外流入向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 及转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(t)$ 满足 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{Y}^*(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})$ 时,流量的分布向量 $\boldsymbol{Y}(t)$ 收敛于给定向量 $\boldsymbol{Y}^*$,即 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{Y}^*$。其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

证明:不妨增加一个 区域表示流量流出系统的那个区域,可用马尔可夫动态系统描述整个运行过程。在不考虑从系统外流入的向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 的条件下,转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{P}\end{pmatrix} \tag{8}$$

其中列向量 $\boldsymbol{R}=(R_1,R_2,\cdots,R_n)^{\mathrm{T}},R_i=\frac{N_i}{Y_i}(i=1,2,\cdots,n)$,显然第一行对应的状态为吸收状态,假定其它各行均对应非吸收状态(这一点符合实际情况),由文献[4] 可知,对于吸收链 $\boldsymbol{P}'$,矩阵 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$ 可逆,且有$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{P}^k$。由矩阵级数的收敛性可知,$\boldsymbol{P}^t\to 0(t\to\infty)$ 。对(7)式两端取极限可得

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})^{-1} \tag{9}$$

由上式可知当流量的状态转移过程中只要调节流入向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 使其满足 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{Y}^*(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})$,则一定有 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{Y}^*$,即定理结论成立。

由该定理可知,如果决策者希望各区域趋于稳定的流量分布向量 $\boldsymbol{Y}^*$,只需引入适当的系统外流入向量 $\boldsymbol{r}$ 进行调节即可达到该分布。然而,由于向量 $\boldsymbol{r}$ 的每个分量不一定全为正值(指存在流出系统的分量但不同于向量 $\boldsymbol{N}(t)$ 的分量),因此,不能保证 $\boldsymbol{Y}(t)$ 中每个分量非负。而引入调节向量 $\boldsymbol{r}$ 后有

$$\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{Y}(0)\boldsymbol{P}^t+(\boldsymbol{Y}^*-\boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{P})\sum_{k=0}^{t-1}\boldsymbol{P}^k \tag{10}$$

确定了理想分布 $\boldsymbol{Y}^*$ 后,是否对每一个 t 都有 $Y_i(t)\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$ 是决策者很关心的问题。分解式

(10)为 $Y(t)=Y^*-(Y^*-Y(0))P^t$,如果对任意 t ,弱化条件

$$Y^*\geqslant(Y^*-Y(0))P^t \tag{11}$$

成立,则一定有 $Y_i(t)\geqslant0(i=1,2,\cdots,n)$ 。只要存在某个 t 使得弱化条件不成立,说明 Y^* 是无法达到的,即可认定 Y^* 是不合理的,需重新改进。但要验证对任意 t ,弱化条件(11)都成立是不现实的。因此,需引入能得到可执行算法的有关向量理论[4]。

定理2:对给定的 $Y^*>0$ (各分量恒正),定义 $H(t)=\sum_{i=1}^{n}|(Y_i^*-Y_i(0))P^t|$,如果存在某个 t 使得

$$\min_i Y_i^*\geqslant H(t) \tag{12}$$

则:弱化条件式(11)对 $t,t+1$ 都成立且必存在某个 t 使得式(12)成立。

检验 Y^* 是否有效的算法如下:(由定理2,该算法将有限终止)

Step 1:输入 $Y^*,Y(0)$,P ,$s=0$;

Step 2:检验是否 $Y^*\geqslant Y^*P$,如果是,输出有效标志。否则,转 Step 3;

Step 3:检验是否 $\min_i Y_i^*\geqslant H(s)$;如果是,输出有效标志。否则,转 Step 4;

Step 4:检验是否 $\min_i Y_i^*\geqslant H(s+1)$,如果是,输出有效标志。否则,检验是否 $Y^*\geqslant(Y^*-Y(0))P^{s+1}$,如果是,令 $s=s+1$,转 Step 3,否则,输出无效标志。

然而,以上模型中假设 $P(t)=P$ (常矩阵),$r(t)=r$ (常向量)显然过于机械。因此,对模型可做相应的扩展和改进。这里不妨设 $\alpha\leqslant r_i(t)\leqslant\beta$(这一点符合实际情况),决策者所关心的是系统可否在尽可能短的时间(周期)达到或接近理想分布 Y^* 。

定义两向量距离 $d(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(X_i-Y_i)^2$,其中 λ_i 为分量的权重因子,每步状态转移过程中,令 $r(1)=(c,r(0),c_2r_2(0),\cdots c_nr_n(0))$,$Y(1)=Y(0)P(0)+r(0)$。

这样,问题将归结为求解关于变量 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的二次规划问题

$$\min d(Y(1),Y^*) \tag{13}$$

$$s.t\quad \alpha\leqslant c_ir_i\leqslant\beta\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

参考文献:

[1] 李尚志. 数学建模教程[M]. 南京: 江苏教育出版社, 1996.

[2] 裘宗燕. 数学软件系统的应用及其程序设计[M]. 北京: 北京大学出版社, 1993.

[3] 张庆波, 周延延. 马尔可夫决策过程在防空系统目标分配中的应用[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2001, 2(5): 73-75.

[4] 姜启源. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社,1997.

(编辑:门向生)

The Steady - State Solution and Optimal Adjusting Strategy for a Kind of Multi - Phase Decision Making Model

LI Bing - jie, ZHANG Lei

(The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China)

Abstract: In this paper the model of difference equations for a kind of deterministic multi - phase decision making system and the existence conditions of its steady - state solution are derived, and the steady - state solution is obtained. Meanwhile the method of determining the unknown parameters in the model is proposed. By using Markov decision - making method, the steady - state solution for corresponding stochastic model is given and the optimal adjusting strategy that makes the system operation attain the ideal state is proposed.

Key words: difference equation; characteristic equation; Markov decision - making method; transition probability matrix