基于最小二乘法 Lagrange 插值基函数的拟合推广

刘进忙， 冯有前， 张晓刚
(空军工程大学 导弹学院，陕西 三原 713800)

摘 要:利用广义逆矩阵给出了低阶多项式的拟合函数,推导出了拟合递推关系式,最后给出了拟合性质,这些在工程中是一种非常有效的方法。

关键词:广义逆矩阵;拟合系数;拟合性质
中图分类号:TP391; O151 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2002)04-0084-04

Lagrange 插值公式具有十分重要的意义和性质,在工程中有一定的应用。龙格(Runge)现象影响了该公式的应用,在工程中一般用最小二乘法来计算插值多项式,是一种很有效的方法。在一些特殊条件下,如对空中目标的跟踪、外推、插值、滤波等处理过程中,多项式系数的拟合计算仅仅是一中间过程,并不需要关心每个系数的具体值,最终还需代人新的点进行外推、插值、滤波等。因此需要推导出基于最小二乘方法的 Lagrange 插值多项式拟合系数有利于工程问题的进一步简化,避免求拟合的中间过程,给出一步到位的套用公式,使这一问题十分方便。

1 低阶多项式的拟合系数

设实验或工程测量的一组点列,(t_i, x_i), $i=1,2,\cdots n$,拟合的多项式为

$$\hat{x}(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_mt^m \tag{1-1}$$

也可以写成

$$\hat{x}(t)=\alpha_1^m(t)x_1+\alpha_2^m(t)x_2+\cdots+\alpha_n^m(t)x_n, m<n, \tag{1-2}$$

上式为最小二乘意义下的拟合等式。$a_i(i=0,1,2,\cdots,m)$是拟合的 m 次多项式第 i 项系数,是所有 $t_i,x_i(i=1,2,\cdots,n)$的函数。$\alpha_i^m(t)(i=1,2,\cdots,n)$为第 i 个拟合系数,为 $t_i,a_j(i=1,2,\cdots,n,j=0,1,\cdots m)$的函数。当 $n=m+1$ 时,$\alpha_i^m(t)$即 Lagrange 插值基函数。当 $n>m+1$ 时,$\alpha_i^m(t)$ 即可看成 Lagrange 插值基函数在最小二乘意义的拟合推广。

加权最小二乘可定义为

$$Q_n^m=\sum_{i=1}^n\omega_i^2[x_i-(a_0+a_1t_i+a_2{t_i}^2+\cdots+a_mt_i^m)]^2 \tag{2}$$

求出使 Q_n^m最小的 $a_i(i=0,1,2,\cdots,m)$ 值,其中 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$根据工程中具体测量情况而定。对 $a_i(i=0,1,\cdots,m)$求导,可得到一方程组,归结于对矩阵求广义逆(Moore-penrose)。

$$\hat{x}(t)=[1\quad t\quad t^2\cdots t^m]\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}=[1\quad t\quad t^2\cdots t^m]\begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_1t_1 & & \omega_1{t_1}^m\\ \omega_2 & \omega_2t_2 & \cdot & \omega_2t_2^m\\ \cdot & & & \\ \omega_n & \omega_nt_n & \cdots & \omega_nt_n^m\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}\omega_1x_1\\\omega_2x_2\\\vdots\\\omega_nx_n\end{bmatrix} \tag{3}$$

当 $\omega_i=1$ 时,$(i=1,2,\cdots,n)$为一般最小二乘方法。后面均讨论 $\omega_i=1$ 的情况。在上式中,先计算后两项,可得到式(1-1)。先计算前两项,可得到式(1-2)。在一些工程计算中,需要先计算前两项,减少中间过程,

收稿日期:2001-10-22
基金项目:国家“高等学校骨干教师资助计划”首批资助项目(GC-810-90039-1003).
作者简介:刘进忙(1958-),男,陕西渭南人,教授,主要从事指挥自动化信号与信息处理研究.

得出较为准确的公式。设式(3)中间矩阵为 A^+,经过计算可得

$$\alpha_i^0(t)=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

$$\alpha_i^1(t)=\frac{1}{n}+\frac{(t_i-\bar{t})(t-\bar{t})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2},\quad 其中\ \bar{t}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i,\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{5-1}$$

$$\alpha_i^2(t)=\alpha_j^1(t)+\frac{[t_i^2-\overline{t^2}-(t_i-\bar{t})B][t^2-\overline{t^2}-(t-\bar{t})B]}{\sum_{i=1}^{n}[t_i^2-\bar{t}^2-(t_i-\bar{t})B]^2}, \tag{5-2}$$

其中

$$B=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i^2(t_i-\bar{t})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2},\quad \overline{t^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

若 x 为雷达测量位置,采用微分方法,很容易求出该目标的速度、加速度的拟合系数的各分量。

若等间隔采样,即 $t_i=iT(i=1,2,\cdots,n)$,$t=jT$,可计算出

$$\alpha_i^1(jT)=\alpha_i^0+\frac{3[2i-(n-1)][2j-(n-1)]}{n(n^2-1)} \tag{6-1}$$

$$\alpha_i^2(jT)=\alpha_i^1(jT)+\frac{5[6i^2-6(n+1)i+(n+1)(n+2)][6j^2-6(n+1)j+(n+1)(n+2)]}{n(n^2-1)(n^2-4)} \tag{6-2}$$

其中,$B=(n+1)T$, (6-1)式分母 $=n(n^2-1)(n^2-4)\ T^4/180$。

当 $j=n+1$,即对 x 的一步预测,其系数为

$$\alpha_i^2[(n+1)T]=\frac{1}{n}+\frac{3[2i-(n+1)]}{n(n-1)}+\frac{5[6i^2-6(n+1)i+(n+1)(n+1)]}{n(n-1)(n-2)} \tag{7}$$

2 增加 m 的拟合递推关系

为了讨论一般的情况,设 $f_0,f_1,\cdots,f_{m+1}$ 为线性不相关的函数。则

$$\hat{x}(t)=a_0f_0(t)+a_1f_1(t)+\cdots+a_mf_m(t)=\alpha_1^m(t)x_1+\alpha_2^m(t)x_2+\cdots+\alpha_n^mx_n,(n>m) \tag{8}$$

定义矩阵

$$\boldsymbol{B}_m=(b_0b_1\cdots b_m)=\begin{bmatrix} f_0(t_1) & f_1(t_1) & \cdots & f_m(t_1)\\ f_0(t_2) & f_1(t_2) & \cdots & f_m(t_2)\\ \vdots & & \cdots & \\ f_0(t_n) & f_1(t_n) & \cdots & f_m(t_n)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=[x_1\ x_2\cdots x_n]^{\mathrm{T}}$$

在最小二乘意义下,其向量 $\boldsymbol{a}$ 为: $\boldsymbol{a}=[a_0\ a_1\cdots\ a_m]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}_m^+\boldsymbol{X}$ (9)

$$\hat{x}(t)=[f_0(t)\ f_1(t)\cdots f_m(t)]\boldsymbol{B}_m^+\boldsymbol{X}=[\alpha_1^m(t)\quad \alpha_2^m(t)\quad \cdots\alpha_n^m(t)]\boldsymbol{X} \tag{10}$$

定理 1 在式(8)中增加 $f_{m+1}(t)$ 项的最小二乘的拟合系数可递推如下:

$$\alpha_i^{m+1}(t)=\alpha_i^m(t)+\frac{[f_{m+1}(t)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^m(t)f_{m+1}(t_j)]_{t=t_i}[f_{m+1}(t)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^m(t)f_{m+1}(t_j)]}{\sum_{i=1}^{n}[f_{m+1}(t_i)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^m(t_i)f_{m+1}(t_j)]^2},(i=1,2,\cdots,n) \tag{11}$$

证明:$\boldsymbol{B}_{m+1}^+=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_m^+\left(I-\dfrac{b_{m+1}\boldsymbol{C}_{m+1}^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{C}_{m+1}\|^2}\right)\\ \dfrac{\boldsymbol{C}_{m+1}^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{C}_{m+1}\|^2}\end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{C}_{m+1}=b_{m+1}-\boldsymbol{B}_m\boldsymbol{B}_m^+b_{m+1}$

设 $b^m=[f_0(t)\quad f_1(t)\quad\cdots\quad f_m(t)]$, $\quad\alpha^m=[\alpha_1^m(t)\ \alpha_2^m(t)\cdots\ \alpha_n^m]$ 则

$$\alpha^{m+1}=b^{m+1}\boldsymbol{B}_{m+1}^+=\left[b^m\boldsymbol{B}_m^+\left(I-\frac{b_{m+1}\boldsymbol{C}_{m+1}^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{C}_{m+1}\|^2}\right)+f_{m+1}(t)\frac{\boldsymbol{C}_{m+1}^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{C}_{m+1}\|^2}\right]=\alpha^m+(f_{m+1}(t)-\alpha^mb_{m+1})\frac{\boldsymbol{C}_{m+1}^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{C}_{m+1}\|^2} \tag{12}$$

$$C_{m+1}=b_{m+1}-B_mB_m^+b_{m+1}=\begin{bmatrix}f_{m+1}(t_1)\\f_{m+1}(t_2)\\ \\f_{m+1}(t_n)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\alpha_1^m(t_1)&\alpha_2^m(t_1)&\cdots&\alpha_n^m(t_1)\\\alpha_1^m(t_2)&\alpha_2^m(t_2)&\cdots&\alpha_n^m(t_2)\\&&\cdots&\\\alpha_1^m(t_n)&\alpha_2^m(t_n)&\cdots&\alpha_n^m(t_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{m+1}(t_1)\\f_{m+1}(t_2)\\ \\f_{m+1}(t_n)\end{bmatrix}$$

在 C_{n+1} 向量中，第 i 个元素为

$$C_i=f_{m+1}(t_i)-\sum_{j=1}^n\alpha_j^m(t_i)f_{m+1}(t_j)=f_{m+1}(t_i)-\sum_{j=1}^n\alpha_j^m(t)f_{m+1}(t_j)\big|_{t=t_j}\tag{13}$$

结合式(12)，可得到式(11)结论。

若 $f_i(t)=t^i,i=0,1,2,\cdots,m+1$，可得到

$$\alpha_i^{m+1}(t)=\alpha_i^m(t)+\frac{\left(t^{m+1}-\sum_{j=1}^n\alpha_j^m(t)t_j^{m+1}\right)\big|_{t=t_i}\left(t^{m+1}-\sum_{j=1}^n\alpha_j^m(t)t_j^{m+1}\right)}{\sum_{i=1}^n\left(t_i^{m+1}-\sum_{j=1}^n\alpha_j^m(t_i)t_j^{m+1}\right)^2}\tag{14}$$

为式(8)的拟合递推系数。由式(4)(5)(6)可计算出 $\alpha_i^3(t)$，即：

$$\alpha_i^3(t)=\alpha_i^2(t)+\frac{[t_i^3-\overline{t^3}-(t_i^2-\overline{t^2})F-(t_i-\bar t)D][t^3-\overline{t^3}-(t^2-\overline{t^2})F-(t-\bar t)D]}{\sum_{i=1}^n[(t_i^3-\overline{t^3})-(t_i^2-\overline{t^2})F-(t_i-\bar t)D]^2}\tag{15-1}$$

其中 $F=\dfrac{\sum_{i=1}^nt_i^5-\overline{t^2}\sum_{i=1}^nt_i^3-(\sum_{i=1}^nt_i^4-\bar t\sum_{i=1}^nt_i^3)B}{\sum_{i=1}^n[t_i^2-\overline{t^2}-(t_i-\bar t)B]^2}$，　$E=\dfrac{\sum_{i=1}^nt_i^4-\bar t\sum_{i=1}^nt_i^2}{\sum_{i=1}^n(t-\bar t)^2}$，　$D=E-BF$，　$\overline{t^3}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^nt_i^3$

若等间隔采样，可得：

$$\alpha_i^3(jT)=\alpha_i^2(jT)+7\times\frac{[20i^3-30i^2(n+1)+2i(6n^2+15n+11)-(n+1)(n+2)(n+3)]}{n(n^2-1)}\times\frac{[20j^3-30j^2(n+1)+2j(6n^2+15n+11)-(n+1)(n+2)(n+3)]}{(n^2-4)(n^2-9)}\tag{15-2}$$

其中 $E=\dfrac{T^2}{10}(3n+4)(3n+1)$，$F=\dfrac{3}{2}(n+1)T$，$D=-\dfrac{T^2}{10}(6n^2+15n+11)$

式(15-1)分母 $=\dfrac{T^6}{2\,800}n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)$。

当 $j=(n+1)$，即一步预测，其系数为

$$\alpha_i^3(n+1)=\alpha_i^2(n+1)+7\cdot\frac{[20i^3-30i^2(n+1)+2i(6n^2+15n+11)-(n+1)(n+2)(n+3)]}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\tag{15-3}$$

当 $n=4,i=1,2,3,4$，线性系数为 $(-1,4,-6,4)$ 与 Lagrange 插值值相同。比较式(7)可见其系数的规律性是很明显的。

当 $f_i(t)$ 为 $\cos it,\sin(i+1)t,\cos(i+\frac{1}{2})t,\sin(i\pm\frac{1}{2}),\cdots$ 等类型的函数，很容易推出 $\alpha_i^0(t)$，$\alpha_i^1(t)$，$\alpha_i^2(t)$，…。若 $f_i(t_j)=\omega_jt^i$ 情况，如式(3)，可推出 $\alpha_i^0=\omega_i/\sum_{i=1}^n\omega_i^2$，　$\alpha_i^1,\alpha_i^2,\cdots$，在 x_i 分量前须乘以 ω_i。

3 增加 n 的拟合递推关系

当 m 值不变，在式(8)增加一组 t_{n+1},x_{n+1} 测量值，其最小二乘的拟合系数将发生改变。

定理2 若满足式(8)的拟合系数为 $\alpha_i^m(t),i=1,2,\cdots,n$，则满足 $(n+1)$ 个采样点的拟合系数为 $\beta_i^m(t),i=1,2,\cdots(n+1)$ 则

$$\beta_{n+1}^m(t)=\frac{\sum_{j=1}^n\alpha_j^m(t)\alpha_j^m(t_{n+1})}{1+\sum_{j=1}^n[\alpha_j^m(t_{n+1})]^2},\quad\beta_i^m(t)=\alpha_i^m(t)-\beta_{n+1}^m(t)\alpha_i^m(t_{n+1}),\quad i=1,2,\cdots,n\tag{16}$$

证明：设 $\alpha^m(t)=[\alpha_1^m(t)\quad\alpha_2^m(t)\quad\cdots\quad\alpha_n^m(t)]$，$\beta^m(t)=[\beta_1^m(t)\quad\beta_2^m(t)\quad\cdots\quad\beta_n^m(t)\quad\beta_{n+1}^m(t)]$

$b^m(t)=[f_0(t)\quad f_1(t)\quad\cdots\quad f_m(t)]$，$d_{n+1}^*=b^m(t_{n+1})B_n^+$

则

$$\beta^m(t)=b^m(t)B_{n+1}^{+}=b^m(t)[B_n^{+}0]-\frac{b^m(t)B_n^{+}d_{n+1}[d_{n+1}^{*}-1]}{1+d_{n+1}^{*}d_{n+1}}=$$

$$[\alpha_1^m(t)\ \cdots\ \alpha_n^m(t)\ \ 0]-\frac{[\alpha_1^m(t)\ \cdots\ \alpha_n^m(t)]}{1+\sum_{j=1}^{n}[\alpha_j^m(t_{n+1})]^2}\begin{bmatrix}\alpha_1^m(t_{m+1})\\ \vdots\\ \alpha_n^m(t_{m+1})\end{bmatrix}[\alpha_1^m(t_{m+1})\ \cdots\ \alpha_n^m(t_{m+1})\ -1]=$$

$$[\alpha_1^m(t)\ \cdots\ \alpha_n^m(t)\ \ 0]-\beta_{n+1}^m(t)[\alpha_1^m(t_{m+1})\ \cdots\ \alpha_n^m(t_{m+1})\ -1]$$

比较两边系数,可得到结论。

其物理意义:

设 n 个采样值,其拟合公式用下式表示

$\underset{n}{\hat{x}}(t)=\alpha_1^m(t)x_1+\cdots+\alpha_n^m(t)x_n$ 其预测式为 $\underset{n}{\hat{x}}(t_{n+1})=\alpha_1^m(t_{n+1})x_1+\cdots+\alpha_n^m(t_{n+1})x_n$ (17)

增加一个采样点的拟合公式为

$\underset{n+1}{\hat{x}}(t)=\beta_1^m(t)x_1+\cdots+\beta_n^m(t)x_n+\beta_{n+1}^m(t)x_{n+1}$ (18)

代入式(16),得:$\underset{n+1}{\hat{x}}(t)=\underset{n}{\hat{x}}(t)-\beta_{n+1}^m(t)\underset{n}{\hat{x}}(t_{n+1})+\beta_{n+1}^m(t)x_{n+1}=\underset{n}{\hat{x}}(t)+\beta_{n+1}^m(t)[x_{n+1}-\underset{n}{\hat{x}}(t_{n+1})]$,该式为线性递推关系。代入 $\beta_{n+1}^m(t)$ 值,可得 $\underset{n+1}{\hat{x}}(t_{n+1})$ 的线性叠加关系。 (19)

4 拟合性质

1) 一般,$\alpha_i^m(t_j)\neq 0$,$\alpha_i^m(t_i)\neq 1(n>m+1)$,且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^m(t_i)=m+1$;

2) 当等间隔采样时(即 $t_i=iT$),$\alpha_i^m(t)$ 与 T 无关,即 $\alpha_i^m(j)$。且 $\alpha_i^m(j)=\alpha_j^m(i)$,具有对称性;

3) 当 $t=jT$ 固定时,$\alpha_i^m(j)$ 即为一条曲线上的采样值,$\alpha_i^m(t)$ 是一个 m、i 的二维曲面的离散采样值,具有良好的对称性;

4) $\sum_{i=1}^{n},\alpha_i^m(t)\equiv 1$ 即 $\sum_{i=1}^{n},\alpha_i^0(t)\doteq 1$,$\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i^m(t)-\alpha_i^{m-1}(t)]=0,(m>1)$,(12)式右端后项对 i 求和为0;

5) 拟合的总误差 Q_m^n 满足[2]:$Q_{n+1}^m\geq Q_n^m$,$Q_n^{m+1}\leq Q_n^m$,且 $Q_{m+1}{}^{m+1}$。

参考文献:

[1] 邓建中.计算方法[M].西安:西安交通大学出版社.1985.

[2] 刘进忙,张晓刚.广义逆矩阵的表达与曲线拟合研究[J].陕西师范大学学报,2001,29(Sup):8-13.

(编辑:田新华)

The Fitting Generalization of Lagrange Interpolation - Radix - Function Based on the Least - Squares Algorithm

LIU Jin - mang, FENG You - qian, ZHANG Xiao - gang

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

Abstract: This paper presents the fitting functions of the low - order multinomial with the help of inverse matrix, reasons out the relational expression of fitting recursion and finally offers the fitting characters. The above mentioned is a very effective method in project.

Key words: generalized inverse matrix; fitting function; fitting character