

# 基于正交子空间波达方向的新算法

韩仲祥, 夏军利

(空军工程大学 电讯工程学院, 陕西 西安 710077)

**摘要:**将实际接收到的多个无线信号进行合理的假设,建立数学模型,取得信号的协方差方程及协方差方程的特征子空间,同时引入噪音的协方差方程与噪声空间分析讨论,结合软件编程,提出一种低信噪比、短时数据情况下估计多个信号波达方向的新方法。

**关键词:**功率谱;传感器;方向角;特征子空间

**中图分类号:**TN911.72 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2002)04-0030-03

在数字信号处理中,估计一种未知信号的来源或方向非常重要,尤其在军事应用中,准确判定无线信号的方向并迅速作出相应的反应,对未来电子战的胜负影响重大。传统的信号源方向估计计算量大,效果不太理想。本文主要从数学角度并结合实际情况,给出一种可估计多个信号到达波方向的基本方法。为便于理解,先推导一下单个信号源的方向估计。

## 1 单个信号源的方向估计

如图1所示, $p$ 为点源,由 $M$ 个传感器组成一个阵列,相邻传感器距离为 $d$ ( $d \leq L/2$ , $L$ 为信号波长), $\theta$ 为点源方向角,下面来讨论该信号的方向估计。

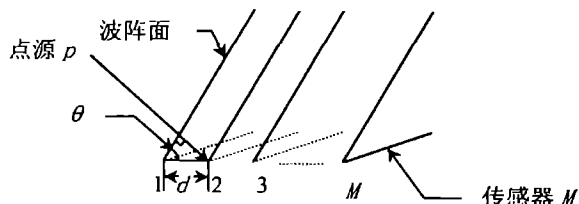


图1 传感器与点源传播关系示意图

### 1.1 模型建立

假设:点源信号为窄带信号,信号的带宽远远小于波阵面穿过阵列的时间的倒数;点源形成的场为远场,其波为平面波。则波阵面穿过相邻传感器的时间为

$$\tau = (d \sin \theta) / c \quad c \text{ 为光速} \tag{1}$$

令第一个传感器获得信号为 $X_1(t)$ ,由于 $(M-1)d$ 不是很大,故第 $M$ 个传感器获得信号为:

$$X_M(t) = X_1(t - (M-1)\tau) \tag{2}$$

又令第 $M$ 个传感器获得的加性噪音为 $n_M(t)$ 。故第 $M$ 个传感器输出信号为:

$$S_M(t) = X_1(t - (M-1)\tau) + n_M(t) \tag{3}$$

式(3)中 $X_1(t - (M-1)\tau) = X_1(t) e^{-j\omega(M-1)\tau}$ ,其中 $\omega = 2\pi f$ , $f$ 为信号频率。  $\tag{4}$

### 1.2 模型分析

为了讨论问题的方便,取 $d = L/2$ ,并把式(1)代入式(4),可得如下等式:

$$X_1(t - (M-1)\tau) = X_1(t) e^{-j\omega(M-1)d \sin \theta} \tag{5}$$

式(3)即为 $S_M(t) = X_1(t) e^{-j\omega(M-1)d \sin \theta} + n_M(t)$ ,写成矩阵的形式为: $S(t) = A(\theta)X(t) + n(t)$   $\tag{6}$

其中 $A(\theta) = \mathbf{a}(\theta)$ ;  $\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{-j\omega d \sin \theta}, \dots, e^{-j\omega(M-1)d \sin \theta}]^T$ ;  $X(t) = X_1(t)$ ;  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$ 。

### 1.3 谱分析

因  $S(t)$  中含有  $\theta$  向量,对  $S(t)$  进行传统的功率谱分析,可得到点源的波束图,通过波束图便可估计出信号源的方向<sup>[1]</sup>。假设信号的方向角为  $-30^\circ$ ,在 Matlab 环境下用程序仿真可得如图 2 所示的功率谱图,基本上估计出了信号的方向。

## 2 多个信号源方向的估计

当有多个信号同时到达时,如何估计信号源的方向呢?下面重点来讨论这种情况。

设仍有  $M$  个传感器, $q(q \geq 1)$  个信号源,且  $M > q$ ,并假设噪声为白噪声且是加性噪声,通过各传感器上的噪声相等,传感器阵列仍然为以上所假设的阵列。

### 2.1 模型建立

当有  $q$  个信号源时,式(6)仍然成立,只不过其中的参量矩阵  $A(\theta)$  和  $X(t)$  发生了变化<sup>[2]</sup>,此时应为:

$$A(\theta) = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_q)] \tag{7}$$

$$a(\theta_r) = [1, e^{-j\pi \sin \theta_r}, \dots, e^{-j\pi(M-1)\sin \theta_r}]^T, a(\theta_r) \in \mathbf{C}^{M \times 1}。 (r=1, 2, \dots, q)$$

$X(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_q(t)]^T$  且  $X(t) \in \mathbf{C}^{q \times 1}$  是  $q$  个信号的幅值向量。重写式(6):

$$S(t) = A(\theta)X(t) + e(t) \tag{8}$$

其中  $S(t)$  是带噪声的数据向量,  $S(t) \in \mathbf{C}^{M \times 1}$ ;  $e(t) \in \mathbf{C}^{M \times 1}$  代表等加性噪声向量;  $t=1, 2, 3, \dots, N$ 。

### 2.2 模型讨论

对式(7)作以下假设:

$M > q$ , 矩阵  $A(\theta)$  的秩为  $q$ , 且对不同的  $\theta$  值, 向量  $a(\theta_i)$  彼此线性独立;

$X(t)$  的协方差矩阵  $R_x = E[X(t)X^H(t)] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [X(t)X^H(t)]$  为非奇异矩阵, 且  $N > M$ 。满足以上假设

时, 观测向量  $S(t)$  的协方差矩阵  $R_{xx}$ :

$$R_{xx} = E[S(t)S^H(t)] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [S(t)S^H(t)] = A(\theta)R_x A^H(\theta) + S_2 \tag{9}$$

其中  $S_2 = E[e(t)e^H(t)]$  为等加性噪声的协方差矩阵, 因为噪声为白噪声且相等, 所以:

$$E[e(t)e^H(t)] = \sigma^2 I, \quad \sigma^2 = \lambda_i \quad (i=q+1, q+2, \dots, M) \tag{10}$$

式中  $\lambda_i$  为  $S_2$  的特征值, 当  $i=1, 2, \dots, M$  时,  $\lambda_i$  是矩阵  $R_{xx}$  的所有特征值;  $I$  为单位矩阵。

简写式(9):  $R_{xx} = AR_s A^H + \sigma^2 I$  (11)

利用矩阵的特征值分解, 假设式(11)可分解为:  $R_{xx} = V \Lambda V^H$  (12)

其中  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$  为对角矩阵, 且有:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_q \geq \lambda_{q+1} = \lambda_{q+2} = \dots = \lambda_M = \sigma^2$ ;

$V = [v_1, v_2, \dots, v_M]$ ,  $v_i (i=1, 2, \dots, M)$  为  $M \times 1$  阶向量, 若有向量  $V_k (k=q+1, q+2, \dots, M)$  使得:

$$R_{xx} v_k = \lambda_k v_k \quad v_k \in \mathbf{C}^{M \times 1} \tag{13}$$

$\lambda_k$  为矩阵  $R_{xx}$  第  $k$  个特征值,  $v_k$  为  $\lambda_k$  对应的特征向量, 于是式(13)可变为:

$$R_{xx} v_k = (AR_s A^H + \sigma^2 I) v_k = \lambda_k v_k = \sigma^2 v_k, \text{ 所以有: } AR_s A^H v_k = 0_{M \times 1} \tag{14}$$

即:  $AR_s A^H v_k$  为  $M \times 1$  阶的 0 矩阵向量, 给式(14)左乘  $v_k^H$  即变为 0 标量:

$$v_k^H AR_s A^H v_k = 0 \text{ 变形为: } (A^H v_k)^H R_s A^H v_k = 0 \tag{15}$$

由假设知  $R_s$  为非奇异矩阵, 所以  $R_s \neq 0$ , 则式(15)中只有:  $A^H v_k = 0$  (16)

式(16)即为:  $a^H(\theta_r) v_k = 0 \quad (r=1, 2, 3, \dots, q)$  (17)

式(17)说明: 含有方向角  $\theta$  的向量  $a(\theta)$  组成的信号子空间与噪声向量  $v_k$  组成的噪声子空间正交。利用这一特殊性质可对信号方向进行估计<sup>[3-4]</sup>。

### 2.3 伪功率谱分析

在上述推导过程中,  $a^H(\theta) v_k = 0$ , 而在实际情况下, 因为还有其它干扰信号存在, 且各个传感器获得的

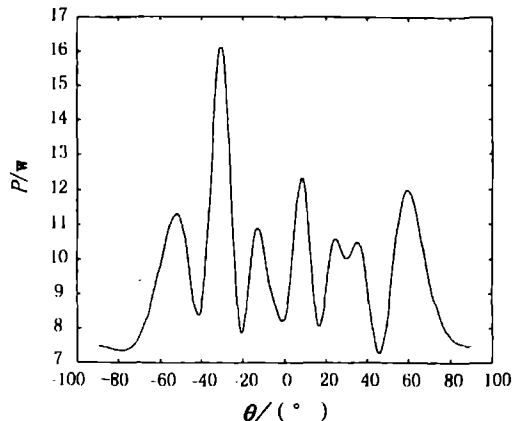


图2  $\theta$  为  $-30^\circ$  时信号功率与方向角估计仿真示意图

噪声不可能完全一致,故  $\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{v}_k$  不可能为 0,但数值很小,故可定义信号的伪功率谱  $P_M$  为:

$$P_M = \frac{1}{\sum_{k=q+1}^M |\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{v}_k|^2} = \frac{1}{\sum_{k=q+1}^M (\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{v}_k)(\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{v}_k)^*} \quad (18)$$

让  $\theta$  在  $-90^\circ \sim 90^\circ$  之间扫描,当  $\theta$  与信号源的方向角一致时,  $P_M$  值很大,当  $\theta$  与信号源的方向角不一致时,  $P_M$  值却很小(如果  $\theta$  遇到  $-90^\circ$ 、 $0^\circ$  和  $90^\circ$  这 3 个特殊角度时,改变一下传感器阵列的角度即可),以  $P_M$  值为纵轴,以  $\theta$  角为横轴组成伪功率谱坐标系,谱峰点所对应的  $\theta$  角就是我们所估计的信号源的方向角。

#### 2.4 计算机仿真试验

假设信号源为 3 个,且方向角依次为  $-40^\circ$ 、 $40^\circ$  和  $60^\circ$ ,传感器为 20 个,依上述原理在 Matlab 环境中进行编程验证,运行该程序可得到图 3 所示的功率谱。由图 3 可以明显地看出:伪功率谱较大的 3 个值对应横坐标的角度分别为  $-40^\circ$ 、 $40^\circ$  和  $60^\circ$ ,与程序中假定的 3 个信号的方向角完全一致,成功地估计出信号的方向。

### 3 结论

该方法不同于一般的功率谱分析:首先对空间信号取协方差,利用信号子空间与噪音子空间正交这一特征,定义信号的伪功率谱,伪功率谱中含有信号方向角,用软件编程,让方向角在  $-90^\circ \sim 90^\circ$  范围内扫描,便可确定信号方向角。通过以上理论推导和仿真结果可看出,该方法对于平面波的方向估计简单、准确、可靠。本文提出的方法和思路,对于其它波的方向估计有重要参考价值。

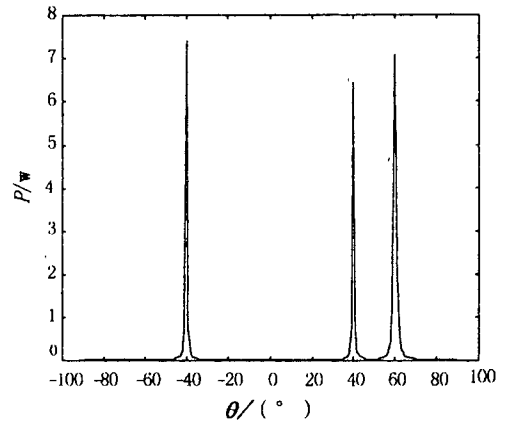


图 3  $\theta$  为  $-40^\circ$ 、 $40^\circ$  和  $60^\circ$  时信号伪功率与方向角估计仿真示意图

#### 参考文献:

- [1] 胡广书. 数字信号处理[M]. 北京:清华大学出版社,1999.
- [2] 张贤达. 数字信号处理中的线性代数[M]. 北京:科学出版社,1997.
- [3] Ermolave V T, Gershman A B Fast algorithm for minimum - norm direction - of - arrival estimation[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1994, 42(5): 2389 - 2394.
- [4] Wu Q, Wong K M. An application of generalized correlation analysis to the estimation of the direction of arrival of signals in unknown correlation noise[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1994, 42(5): 2331 - 2343.

(编辑:门向生)

## A New Method Based on Orthogonal Subspace for Estimation of the Direction of Signals

HAN Zhong - xiang, XIA Jun - li

(The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China)

**Abstract:** This paper presents a new method in estimating the direction of more signal waves under conditions of low signal - to - noise ratio and short data. Simultaneously in the paper first some reasonable assumptions are given, then the mathematical model is created. Through deduction the covariance equation of the signal and the characteristic subspace are obtained, at the same time, the covariance equation of noise and the noise space should also be taken into consideration.

**Key words:** power spectrum; sensor; directional angle; characteristic subspace