Zernike 多项式拟合干涉波面的基本原则

莫卫东
(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

摘　要:全面分析了用Zernike多项式拟合光学干涉波面的方法及其过程,找到了在拟合计算过程中出现“相关”或“病态”的原因,由此得到了用Zernike多项式拟合光学平面干涉波面应遵守的基本原则——Zernike多项式拟合干涉波面的阶不能大于被测光瞳内干涉条纹的数量,以避免拟合计算过程中出现“相关”或“病态”,保证了干涉检测结果的可靠性。

关键词:干涉波面;Zernike多项式干涉波面拟合;数字化干涉处理
中图分类号:O43　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2002)03-0035-04

数字化干涉测量技术是现代精密光学测量技术重要发展方向,并已经取得了成功。本文仅阐述数字化干涉测量系统中的核心技术之一——干涉波面的Zernike多项式拟合分析的方法及其原则,其系统的工作原理和结构参阅文献[1~4]。原则上讲,对光学干涉波面进行Zernike多项式拟合是一个数学问题,如何求出Zernike多项式拟合光学干涉波面的系数,在数学上有两种方法可选,一是通用而简洁的最小二乘法,二是被认为稳定性更好的Gram-Schimdt正交化方法。无论最小二乘法,还是Gram-Schimdt正交化法,都仍将不可避免地可能出现“病态”或“相关”的困扰,从而也就无法百分之百地保证采用Zernike多项式拟合干涉波面测量结果的可靠性和精度。为什么会出现“病态”或“相关”呢? 在什么条件下可能出现“病态”或“相关”? 当出现“病态”或“相关”时,对Zernike多项式拟合干涉波面的精度和可靠性到底有多大的影响呢? 如果这些问题不解决,应用Zernike多项式拟合干涉波面的任何精密干涉测量系统的精度和可靠性将难以令人信服,从而使Zernike多项式拟合干涉波面进行数字化学精密测量的方法失去其实际应用的价值。

1　Zernike 多项式拟合干涉波面原理

所谓对干涉波面的拟合,就是对离散的干涉条纹相位的数值进行数学处理,把这些包含着被测表面信息的干涉波面上的离散点拟合成一个与实际的干涉波面尽可能一致的数学上的波面函数。由于在光学表面检测的绝大多数情况中,被测光学表面或光学系统的出射光波面总是趋于光滑和连接的,因此,这样的波面函数一定可以表达成为一个完备的基底函数的线性组合,或一个线性无关的基底函数的线性组合。(注:上述数学处理的过程在本文称之为拟合,而在某些其它文献中称之为“展开”。)在众多类似的研究中,研究者曾选择过许多不同类型的基底函数拟合光学干涉波面[5]。然而,在光学测量问题中最终都选择了Zernike多项式作为对被测光学波面拟合的基底函数系。最直接的理由是:实践表明,Zernike多项式对光学问题中有关对光学波面的拟合精度最高,其本质的原因是Zernike多项式有这样几个特点。

1) Zernike多项式在单位圆上正交,即:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} Z_n^l(\rho,\theta)\dot{Z}_m^k(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\dfrac{\pi}{n+1}\delta & (n=m,l=k)\\ 0 & (n\neq m,l\neq k)\end{cases} \tag{1}$$

上式中 $Z_n^l(\rho,\theta)$ 和 $Z_l^m(\rho,\theta)$ 为Zernike圆多项式 。当 $l=0$ 时,$\delta=1$;当 $l\neq0$ 时,$\delta=0.5$ 。

由于一般被测光学器件或光学系统都具有圆形光瞳或圆形的通光孔,经过归一化后正好为单位圆,因此

收稿日期:2001-07-02
作者简介:莫卫东(1959-),男,广西合浦人,副教授,主要从事应用光学研究.

Zernike 多项式所具有的这种单位圆上的正交性恰好满足圆形光瞳的特点,而且 Zernike 多项式的正交性使拟合多项式的系数能相互独立,从而避免了系数之间的偶合造成其物理意义的混淆不清。

2) Zernike 多项式自身所特有的旋转对称性,使之对光学问题的求解过程中一般均具有良好的收敛性。

3) Zernike 多项式与初级象差有着一定的对应关系,并且与光学设计中的惯用的 Seidel 象差[6-7]函数很容易建立起联系,这也是以前为什么光学象差分析中常用到 Zernike 多项式的原因。

正是由于 Zernike 多项式具有上述重要的特点,使它成为了通过干涉图条纹对被测表面进行检测与分析的理论基础和出发点。Zernike 多项式用极坐标的具体表达为

$$Z_n^l(\rho) = R_n^l(\rho) \cdot \Theta_n^l(\theta) \tag{2}$$

n 为多项式的"阶", 取值为 0,1,2,…;l 为与阶数 n 相关的序号,l 的值恒与 n 同奇偶性,且绝对值小于或等于阶数 n。

令 $$l = n - 2m \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

$$R_n^l(\rho) = R_n^{n-2m}(\rho) = \begin{cases} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \dfrac{(n-s)!}{s!\ (m-s)!\ (n-m-s)!} \cdot \rho^{n-2m} & (n-2m>0) \\ R_n^{|n-2m|} & (n-2m<0) \end{cases} \tag{3}$$

$$\Theta_n^l(\theta) = \Theta_n^{n-2m}(\theta) = \begin{cases} \cos[(n-2m)\theta] & (n-2m>0) \\ -\sin[(n-2m)\theta] & (n-2m<0) \end{cases} \tag{4}$$

这样,被测光学干涉波面的数学表述函数用 Zernike 多项式拟合表达为

$$F(\rho,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z_n^{n-2m}(\rho,\theta) \text{或} F(\rho,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z_k(\rho,\theta) \tag{5}$$

式中,a_k 为 Zernike 多项式的拟合系数。

如何求出拟合系数 a_k,即,也就是完成对光学干涉波面的拟合是整个系统检测工作中的核心内容,如果不能正确求解出拟合系数 a_k,随后对光学玻璃表面的所有检测与分析都将无从做起。

2 Zernike 多项式拟合基本法则的发现与研究

2.1 研究的思路与方法

本研究的目的是要揭示什么条件下,用 Zernike 多项式拟合干涉波面将出现"病态"或"相关",从而保证采用 Zernike 多项式拟合干涉波面测量结果的可靠性和精度? 具体的方法如下:

1) 调试干涉图像在单位光瞳内的干涉条纹数,选择有 5 根;

2) 在干涉条纹的亮纹中心上采样数据 100 个左右。

3) 分别选用 3、4、5、6、7 阶的 Zernike 多项式对该干涉波面进行拟合。但只有 3、4 阶的 Zernike 多项式对该干涉波面的拟合取得了成功,无论对条纹位相,还是对理想平面的拟合精度均很高,且其结果的一致性也非常好。但当应用 5、6、7 阶的 Zernike 多项式对该干涉波面进行拟合时,其拟合的精度与结果均发生了突变,拟合精度并没有随着 Zernike 多项式拟合阶的增高而提高,反而急剧变坏。若被拟合的是理想平面的干涉波面,则拟合计算过程将被迫中断。对于上述情况,起初被认为可能是由于采样点不够多造成的,为此,对于同样的干涉波面,增加若干倍个采样点,总数达到近 1 000 多个,然后,采用上述完全一样的过程对此干涉面进行 Zernike 多项式的拟合,仍然没有达到预想的结果。

4) 调整干涉图像在单位光瞳内的干涉条纹数,重复上述研究过程,其结果见表 1。

2.2 研究的结果与分析

从表 1 可以寻找出有关 Zernike 多项式拟合干涉波面的规律及其基本原则:

1) 根据表中对实际平面的拟合计算结果,只要拟合中选择的 Zernike 多项式阶合适,采样数据点多一些,有利于 Zernike 多项式对干涉波面拟合精度的提高。

2) 从对实际平面的拟合精度分析可以看出,采样数一定,选择较高的 Zernike 多项式的阶拟合,其拟合精度较高一些,但要求所选用的 Zernike 多项式阶应不大于条纹数。如表中实测平面时光瞳内的干涉条纹为 4,Zernike 多项式阶选 3,其拟合精度高于干涉条纹数为 7,即便是 7 阶的数据采样点数还多于 3 阶的数据采样点数。

3) 从表中的同样都是 6 根干涉条纹数的理想平面的拟合结果比较分析可以看出,被拟合干涉波面数据

采样点的多少不是提高拟合精度先决条件,即便采样点数较少(不能太少!),只要 Zernike 多项式的阶选择合适,也能保证 Zernike 多项式对干涉波面一定的拟合精度,采样点数多,也不一定能保证其精度一定高。

4) 拟合时取 Zernike 多项式的阶与条纹数相同时,对干涉条纹的位相的拟合精度仍然较高,没有发生突变,但是,被测平面的平整度误差则出现的突变,说明在此情况下,Zernike 多项式拟合干涉波面的进行平面平整度检测可靠性已经无法保证。

5) 当拟合时选择的 Zernike 多项式的阶大于被测干涉波面光瞳内的条纹数时,无论对干涉条纹位相,还是被测平面的平整度的精度都将出现突变。可见,Zernike 多项式拟合干涉波面时,不能选用阶大于被测干涉波面光瞳内的条纹数的 Zernike 多项式实施拟合计算。

根据以上分析,当应用 Zernike 多项式拟合干涉波面时,应满足以下基本原则:

Zernike 多项式拟合干涉波面的阶不能大于被测光瞳内干涉条纹的数量即,当在被测光瞳内有 6 根干涉条纹,则用 Zernike 多项式拟合该干涉波面时,只能选择 5 阶或 5 阶以下的 Zernike 多项式进行拟合计算。否则,对被测平面的检测将是不正确的!

表 1　单位光瞳内干涉条纹数、Zernike 多项式阶与拟合过程关系的研究

拟合算法			最小二乘法								
拟合平面	多项式阶		3			4			5		
	条纹数	采样数	P_{rms}	W_{rms}	W_{pv}	P_{rms}	W_{rms}	W_{pv}	P_{rms}	W_{rms}	W_{pv}
理想平面	4	343	0.283×10^{-6}	0.384×10^{-6}	0.167×10^{-5}	0.322×10^{-6}	0.261	0.734		拟合中断失败	
	5	469	0.587×10^{-6}	0.791×10^{-6}	0.425×10^{-5}	0.817×10^{-6}	0.165×10^{-5}	0.980×10^{-5}	0.104×10^{-5}	0.165	0.954
	6	593	0.821×10^{-6}	0.443×10^{-6}	0.300×10^{-5}	0.969×10^{-6}	0.924×10^{-6}	0.536×10^{-5}	0.137×10^{-5}	0.196×10^{-5}	0.135×10^{-5}
	7	703	0.171×10^{-5}	0.105×10^{-5}	0.537×10^{-5}	0.194×10^{-5}	0.151×10^{-5}	0.854×10^{-5}	0.252×10^{-5}	0.289×10^{-5}	0.179×10^{-4}
	6	75	0.311×10^{-6}	0.273×10^{-6}	0.140×10^{-6}	0.310×10^{-6}	0.378×10^{-6}	0.256×10^{-6}	0.483×10^{-6}	0.873×10^{-6}	0.674×10^{-5}
实际平面	4	655	0.113×10^{-1}	0.054	0.216	0.110×10^{-1}	0.064	0.221	0.106×10^{-1}	0.286	2.754
	5	790	0.162×10^{-1}	0.058	0.229	0.159×10^{-1}	0.057	0.224	0.157×10^{-1}	0.085	0.604
	6	921	0.190×10^{-1}	0.059	0.228	0.184×10^{-1}	0.056	0.224	0.179×10^{-1}	0.060	0.228
	7	1059	0.210×10^{-1}	0.055	0.212	0.207×10^{-1}	0.057	0.205	0.201×10^{-1}	0.055	0.223

拟合算法			最小二乘法					
拟合平面	多项式阶		6			7		
	条纹数	采样数	P_{rms}	W_{rms}	W_{pv}	P_{rms}	W_{rms}	W_{pv}
理想平面	4	343		拟合中断失败			拟合中断失败	
	5	469		拟合中断失败			拟合中断失败	
	6	593	0.168×10^{-5}	0.830	3.731		拟合中断失败	
	7	703	0.173×10^{-5}	0.354×10^{-5}	0.221×10^{-4}	0.560×10^{-1}	11.1	74.03
	6	75		拟合中断失败			拟合中断失败	
实际平面	4	655	0.101×10^{-1}	0.396	3.384	0.968×10^{-2}	3.164	31.43
	5	790	0.156×10^{-1}	0.181	1.568	0.150×10^{-1}	2.939	10.39
	6	921	0.175×10^{-1}	0.063	0.248	0.173×10^{-1}	0.154	1.496
	7	1059	0.194×10^{-1}	0.055	0.254	0.191×10^{-1}	0.107	5.508

(注:表中 P_{rms} 为干涉条纹位相拟合精度,W_{rms} 为被测平面表面平整度,W_{PV} 为被测平面表面最高与最低处的峰峰值误差。)

3　结束语

在实践中应用本原则,就可不必担心用 Zernike 多项式拟合干涉波面所选择阶是否合适,拟合的精度是否最高,检测结果的是否可靠,只需要在程序中指明干涉波面的条纹数量,就可直接在程序自动地选择

Zernike 多项式的阶为:干涉条纹数量 - 1 ,就能保证对干涉波面拟合的最高精度,从而也就保证了测量的最高精度。可见,“Zernike 多项式拟合干涉波面基本原则”,为 Zernike 多项式拟合干涉波面时最佳阶的选择找到了依据,为数字化干涉测量系统在最高精度条件下,实现自动化控制提供了可靠的保证,对于现代数字化光学技术的发展与应用具有重要的意义。

致谢:本文在研究中得到了工程院院士、国防科技大学高伯龙教授的悉心指导,在此表示衷心感谢!

参考文献:

[1] SCHWIDER J,BUROW R,ELSSNER K,GRZANNA J,et al. Digital Wavefront Measuring Interferometer:Some Systematic Error Sources[J]. Appl Opt,1983,22(21):3421 - 3431.

[2] 莫卫东. Zernike 多项式拟合干涉面方法研究[J]. 高速摄影与光子学,1991,23(4):296 - 304.

[3] 莫卫东,高伯龙. 数字化技术在玻璃表面检测系统中的应用[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2000,1(5):1 - 4.

[4] 莫卫东,冯金富. 数字化玻璃表面检测系统的研究[J]. 光子学报,2001, 29(9):123 - 126.

[5] BRUNING J H,HERRIOTT R,ALLAGHER J E,et al. Digital Wavefront Measuring Interferometer for Testing Optical Surfaces and Lenses [J]. Appl Oppt, 1974,13(11):2693 - 2703.

[6] 波恩 M. 沃耳夫 E. 光学原理[M]. 北京:科学出版社,1979.

[7] 余景池. 由干涉图计算波差和传递函数[J]. 光学学报,1984,4(9)814 - 820.

(编辑:姚树峰)

The Principle of Fitting Interferogram with Zernike Polynomials

MO Wei - dong

(The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract: The reason of "correlativity" or "ill - condition" in the fitting calculation has been found and a basic rule to fit interferogram with Zernike polynomials has been obtained by systematically analyzing the fitting method and course, i. e. the order of Zernike polynomial to fit interferogram should be less than the number of interference fringes in the diaphragm. By the rule " correlativity" or "ill - condition" in fitting calculation can be absolutely avoided, thus the reliability of interferometry is ensured.

Key Words: interferogram; fitting interferogram with Zernike polynomials; processing interferogram by quantizing.