

# 攻击机动目标的最优导引规律

刘小刚, 宋凯

(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

**摘要:**建立了导弹—目标攻击简化数学模型,提出一种随机最优导引规律;运用卡尔曼滤波理论,引进了机动目标加速度和量测系统的不确定性;通过数字仿真,分别和传统比例导引规律、扩展比例导引规律相比较,表明了该规律的最优性。

**关键词:**扩展比例导引;最佳导引;卡尔曼滤波;机动目标

**中图分类号:**V246 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2002)01-0018-04

空空导弹最重要的一个性能指标是脱靶量,影响脱靶量的因素主要有导引规律、目标加速度、量测噪声及弹体的时滞等。导引规律是其中的核心内容,它的设计好坏直接关系到导弹总体性能。传统的比例导引规律虽然简单、易于实现,但它不考虑目标的机动飞行,因此,在对付高机动的目标时就显得力不从心。

本文运用现代控制理论提出的最优导引规律引进了目标加速度项,并综合考虑弹体时滞和导引头量测噪声的影响,有效地克服了传统比例导引规律的缺点。大量的仿真表明这种最优导引规律与传统的比例导引规律、扩展比例导引规律相比,其制导性能有极大的提高。

## 1 对付机动目标的最优导引规律

### 1.1 数学模型的建立

本文用如图1所示的导弹—目标运动简化模型。导弹在M点,目标在T点,导弹速度矢量为 $V_m$ ,目标速度矢量为 $V_t$ ,导弹加速度为 $n_m$ ,目标加速度为 $n_t$ ,导弹与目标之间的距离为R,X为视线的基准方向。视线与X轴夹角为 $\lambda$ , $V_m$ 与X的夹角为 $\gamma$ , $V_t$ 与X的夹角为 $\beta$ ,导弹M点的Y坐标为 $Y_m$ ,目标的Y坐标为 $Y_t$ ,导弹与目标在Y轴方向的距离为y。

由图1可看出,y对时间的二阶微分为导弹与目标在Y轴方向上的线加速度之差,即

$$\ddot{y} = n_t \cos\beta - n_m \cos\gamma \tag{1}$$

假定 $\beta, \gamma$ 一般都很小,则上式可近似为

$$\ddot{y} = n_t - n_m \tag{2}$$

而当 $\beta$ 角很小时,可得出  $\dot{y} = V_m \sin\gamma$   $\tag{3}$

通过R和 $\lambda$ 近似计算出  $y = R \cdot \sin\lambda$   $\tag{4}$

为计算方便,令 $\lambda$ 很小,则  $y = R \cdot \lambda$   $\tag{5}$

又  $R \approx V_c \cdot (t_f - t)$ ,其中 $V_c$ 为导弹与目标的接近速度,则

$$y = \lambda \cdot V_c \cdot (t_f - t) \tag{6}$$

式(1)、(2)、(4)就组成了导弹—目标的运动方程。

假设弹体可以近似成一阶惯性环节

$$n_m(s)/n_c(s) = 1/(1 + \tau \cdot s) \tag{7}$$

其中, $n_m$ 为导弹加速度; $n_c$ 为控制指令; $\tau$ 为弹体时滞; $s$ 为积分因子。由以上数学模型,可得出相应的导弹

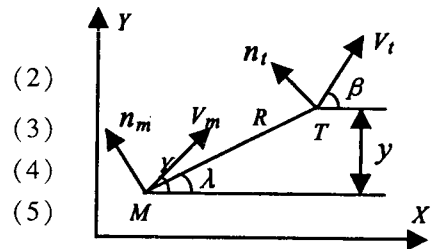


图1 二维导弹目标模型图

与目标数学模型结构图,如图 2 所示。

### 1.2 最优制导律的推导

根据图 2 可写出状态方程

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 + n_1(t) \\ \dot{y}_3 = -\frac{1}{\tau}y_3 + \frac{1}{\tau}n_c(t) \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $y_1$  为相对位置;  $y_2$  为相对速度;  $y_3$  为导弹加速度;  $n_c$  为控制作用;  $\tau$  为导弹的延迟时间, 设  $t_{go} = t_f - t_0$ 。

考虑到现代空战中目标的大机动飞行对导弹需用过载要求的提高和高精度制导对导弹脱靶量的要求, 本文确立导弹脱靶量和需用过载综合最小的性能指标。采用最优线性二次型调节器形式设计出一制导规律, 使下列性能指标最小。

$$J(u) = \frac{1}{2}y_1^T(t_f)y_1(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^t u^T(t)u(t)dt \quad (9)$$

式中,  $t_f$  为导弹与目标相遇的时间。该指标不仅可以保证导弹有足够的机动余量去攻击目标, 而且还具有增大导弹射程的战术意义。

综上所述, 问题的求解就转化为寻求控制函数  $u(t)$ , 使式(8)最小且满足式(7), 状态方程式(8)是线性微分方程, 式(9)为典型的二次型问题。利用极大值原理直接求解, 哈密尔顿函数为

$$H = \frac{1}{2}u^T(t)u(t) + \lambda_1^T y_2(t_f) + \lambda_2^T (y_3(t) + a(t)) + \lambda_3^T (\frac{1}{\tau}u(t) - \frac{1}{\tau}y_3(t)) \quad (10)$$

据最优控制理论, 最优控制使哈密尔顿函数取最小值, 可得最优导引规律为<sup>[1-2]</sup>

$$u(t) = \frac{y_1 + y_2 t_{go} + y_3 \tau (\tau e^{-t_{go}/\tau} + t_{go} - \tau) + \int_0^{t_{go}} \int_{t_0}^t a(t) dt dt}{\frac{1}{3}t_{go}^3 + \frac{1}{2}\tau^3 - \tau \cdot t_{go}^2 + \tau^2 t_{go} - 2\tau^2 t_{go} e^{-t_{go}/\tau} - \frac{1}{2}\tau^3 e^{-2t_{go}/\tau}} (t_{go} - \tau - \tau e^{-t_{go}/\tau}) \quad (11)$$

当导弹与目标速度之间的夹角不大时, 通过几何推导, 即可得到

$$y_1 + y_2 t_{go} = (V_r \times \dot{q}) t_{go}^2$$

式中,  $V_r$  为导弹与目标的相对速度;  $q$  为导弹—目标的视线角速度。令  $X = t_{go}/\tau$

$$N = \frac{-6X^2(e^{-X} + X - 1)}{2X^3 - 6X^2 + 6X + 3 - 12Xe^{-X} - 3e^{-2X}} \quad (12)$$

则 
$$u(t) = N(V_r \times q) + \frac{N}{X^2}(e^{-X} + X - 1)y_3 + \frac{1}{2}Na_i \quad (13)$$

式中, 第 1 项是比例导引规律项; 第 2 项是导弹加速度的修正项; 第 3 项是目标加速度修正项。  $U(t)$  是在  $t_0$  时瞬时求出的制导规律, 此时  $a(t)$  可看成恒定值。故:  $u(t) = -3(V_r \times q + \frac{1}{2}a_i)$  (14)

显然, 不考虑导弹延迟时, 导弹攻击机动目标的最优导引规律是扩展比例导引规律, 而不考虑目标机动加速度时, 则是传统比例导引规律。因此, 在理论上, 它比比例导引规律和扩展比例导引规律更加完善、更加先进。同时, 也说明了最优导引规律是变系数的最佳比例导引规律加上其它补偿信号构成的导引规律。

## 2 制导状态值的估计

### 2.1 卡尔曼滤波算法

上述最优算法式(13)引入目标加速度补偿项来克服目标加速度对制导精度的影响, 它要求制导系统具备估计或量测目标加速度的环节。但当目标加速度估值误差较大时, 制导性能便急剧下降, 甚至比比例导引性能还差。同时, 考虑到制导系统中导引头量测噪声的影响, 不可能直接引用量测到的视线转率。因此, 考虑目标机动加速度的不确定性和导引头的量测误差, 必须利用对它们滤波后的估计值来形成控制指令。为

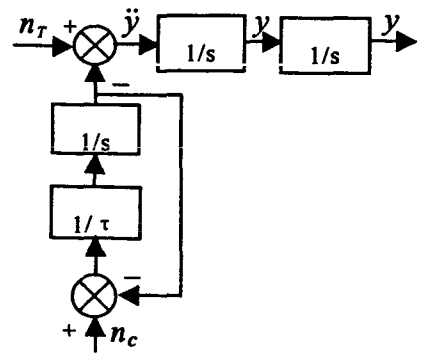


图 2 导弹与目标模型的结构图

此,要求已知目标机动模型和系统的噪声模型,但是由于机动的未知性,不可能准确地建立目标机动模型,在这方面已有不少学者作了大量工作<sup>[3-5]</sup>,为了简化,假设目标机动满足一阶马尔可夫随机过程,即  $\dot{n}_1 = -\lambda_1 n_1 + u_s$  其中  $\lambda_1$  是目标机动带宽,  $u_s$  为白噪声,  $E[u_s] = 0$ ,  $E[u_s^2] = 2\lambda_1 \beta^2$ , 此对应目标加速度普阿松矩形变换,相当于白噪声  $u_s$  通过一低通滤波器后的输出。导引头的量测噪声  $V(t)$  均值为零,均方值为  $\sigma^2$ 。这样可以建立卡尔曼估值的状态方程和量测方程

$$X(t) = FX(t) + BU(t) + W(t) \quad (15)$$

$$Z(t) = H(t)X(t) + V(t) \quad (16)$$

$$\text{式中, } F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{tm}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = [y \quad \dot{y} \quad n_1]^T$$

系统初始状态是高斯分布的随机矢量,其平均值和方差阵分别为  $E\{X(0)\} = m(0)$ ,  $\text{Var}\{X(0)\} = P(0)$ 。观测噪声与初始状态独立,即对于一切  $t > 0$  都有  $\text{cov}\{X(0), V(t)\} = 0$  据卡尔曼滤波理论,可以直接写出卡尔曼滤波的基本公式如下:

### 1) 最佳滤波方程

$$X(t) = FX(t) + BU(t) + K(t)[Z(t) - H(t)X(t) - H(t)BU(t)] \quad (17)$$

### 2) 最佳估值误差协方差矩阵方程满足 Riccati 方程

$$P(t) = FP(t) + P(t)F^T - P(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t) + Q \quad (18)$$

### 3) 最佳增益矩阵

$$K(t) = P(t)H^T(t)R^{-1}(t) = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T \quad (19)$$

$$\text{式中, } Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_1 \beta^2 \end{bmatrix} \quad R = \sigma^2$$

通过解式(15)~(19)即可得到目标加速度及相对距离和速度的估计值,进而可得到视线转率的估计值。把它们代入式(13)即得最优控制指令,从而实现随机最优制导律的设计。

## 2.2 剩余飞行时间的估计

从前面的公式可以看出,在最优控制规律中剩余飞行时间  $t_{go}$  是一项重要的指标。分析、研究和大量的仿真表明,  $t_{go}$  对制导精度影响很大。目前  $t_{go}$  的估计算法很多,其复杂程度也各有千秋。一般取  $t_{go} = -R/R$  作为一种近似的估计量,但这时,最佳制导律的性能相对于比例导引律来说,却没有多大提高,因为这种估计方法必须假设目标、导弹以常速飞行且目标无机动。

Riggs 考虑了导弹沿视线方向的加速度变化对  $t_{go}$  的影响,在假设导弹的轴向加速度在视线方向占主导地位的情况下,导出一种  $t_{go}$  的代数估计方法,该算法计算简单但必须假设目标无机动。本文对 Riggs 算法进行速度、加速度修正以克服 Riggs 的缺点较精确地得到  $t_{go}$  的估计值。在实际仿真中,则利用 Riggs 基本算法得出  $t_{go}$  的初值,然后,利用上一次得到的  $t_{go}$  减去采样间隔作为本次  $t_{go}$  的值。

## 3 系统仿真

为便于计算,列出三种导引规律的具体表达式

$$\text{比例导引规律: } u(t) = -3 \cdot V_r \cdot q \quad (20)$$

$$\text{增广比例导引规律: } u(t) = -3 \cdot (V_r \cdot q + \frac{1}{2} a_t) \quad (21)$$

$$\text{最优导引规律: } u(t) = N(V_r \times q) + \frac{N}{X^2}(e^{-X} + X - 1)y_3 + \frac{1}{2}Na_t \quad (22)$$

目标机动方式为直线飞行 5 s 后,以 7 g 的加速度作开关型机动,每隔 3 s 改变一次机动方向,即

$$a_t = \begin{cases} 0 & t \leq 5 \\ 7g \cdot \text{sgn}(\sin(\pi(t-5)/3)) & t \geq 5 \end{cases}$$

目标保持常速飞行,速度为 300 m/s,导弹与目标初始相对距离为 8 000 m,相对速度为 400 m/s,采样周

期为  $T=0.1\text{ s}$ 。并设以下各参数  $\tau=0.1\sim 0.5$ ,  $\lambda_1=0.2\text{ Hz}$ ,  $\beta=7\text{ g}$ 。

图3,图4分别给出了导弹时滞为0.2和0.5目标加速度为7g时,控制指令随时间变化的曲线图,可以得出以下几点:1)比例导引规律对导弹的加速度要求最大,扩展比例导引规律次之,最优导引规律对导弹加速度的要求则最小。2)与比例导引规律相比较,扩展比例导引和最优导引规律对目标机动的灵敏度高,而且最优导引规律对导弹终端加速度要求较低。

此外,考虑导弹时滞,最优导引规律可有效地克服时滞的影响,使导弹加速度始终限制在较小的范围内,而其它两种导引规律均可能使导弹加速度在终端发散。

图5给出了导弹脱靶量随时间变化的曲线,可以看出在整个飞行过程中最优导引律的脱靶量始终是最小的,它们的终端脱靶量分别为:比例导引20.916 m、扩展比例导引3.839 m、最优导引规律1.335 m,可见最优导引律对导弹性能的改善是巨大的。

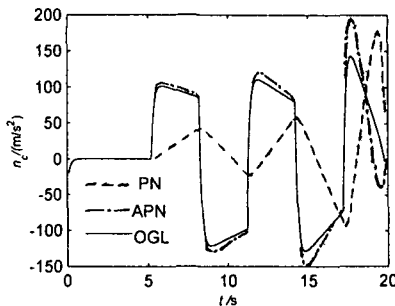


图3 导弹加速度曲线

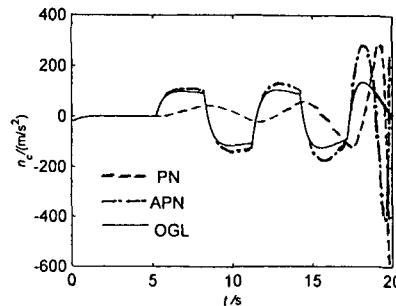


图4 导弹加速度曲线

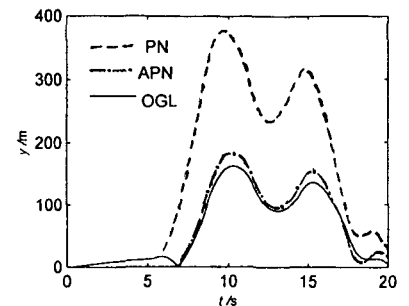


图5 导弹脱靶量曲线

## 4 结束语

本文通过建立导弹目标攻击简化数学模型,并运用线性二次型理论推导出最优导引规律。同时,证明了该最优导引规律是变系数的最佳比例导引规律加上其它补偿信号构成的导引规律。综合考虑目标机动加速度的不确定性和导弹量测系统噪声的影响,运用卡尔曼滤波理论提高目标加速度估值的精度。大量的仿真表明该最优导引规律极大地提高了导弹的性能。本文的结论对新一代导弹制导系统的设计有极大的参考价值,其工程实现也是可行的。

### 参考文献:

- [1] 赵善友. 防空导弹武器寻的制导控制系统设计[M]. 北京:宇航出版社,1992.
- [2] 蒋志凯. 数字滤波与卡尔曼滤波[M]. 北京:中国科学技术出版社,1993.
- [3] 沈 亮. 空空导弹卡尔曼滤波和几种导引规律的研究[J]. 航空兵器,1999,(4):17-24.
- [4] GUELMAN M. Optimal Guidance Law in the Plane [J]. Journal of Guidance Control and Dynamics,1984,(7):471-476
- [5] JASOH L S, KEVIN D K. Passive Homing Missile Guidance Law Based on New Target Maneuver Modles[J]. J Guidance,1990,13(5):803-812.

(编辑:姚树峰)

## Study on Optimal Terminal Guidance Law for Maneuvering Targets

LIU Xiao-gang, SONG Kai

(The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038 China)

**Abstract:** A new optimal guidance law is presented on the basis of the simplified missile-target attacking model. The maneuvering targets acceleration and uncertainty of the measurement system has been considered by using Kalman filter theory and a comparative simulation is done on the same conditions for proportional navigation (PN), argument proportional navigation (APN) and optimal guidance law (OGL) respectively to show the optimality of the conclusions.

**Key words:** optimal guidance; argument proportional navigation; kalman filter; maneuvering target