

牵连运动为平动时的刚体相对运动动力学普遍定理

冯立富, 郭书祥

(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

摘要:由质点相对运动动力学基本方程导出了牵连运动为平动时的刚体相对运动动力学普遍定理,通过实例介绍了该普遍定理的应用,并指出该普遍定理具有一定的理论意义和实用价值。

关键词:牵连运动;平动;刚体;相对运动;动力学普遍定理

中图分类号:0313.5 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2001)06-0027-03

1 牵连运动为平动时的刚体相对运动动力学普遍定理

当牵连运动为平动时,根据质点相对运动动力学基本方程

$$m \mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_g^e + \mathbf{F}_g^h \quad (1)$$

有

$$m \mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_g^e \quad (2)$$

式(2)可称为当牵连运动为平动时的质点相对运动动力学基本方程。

由力学简化的理论可知,当牵连运动为平动时,刚体的牵连带惯性力系可以合成为一个作用线通过其质心 C 的合力 \mathbf{R}_g^e 。

$$\mathbf{R}_g^e = -M \mathbf{a}_c \quad (3)$$

上式中, $M = \sum m$ 为刚体的总质量。于是,当牵连运动为平动时,刚体相对运动的动力学普遍定理为

$$M \mathbf{a}'_C = \sum \mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{R}_g^e \quad (4)$$

$$\frac{dL'_O}{dt} = \sum m_o(\mathbf{F}^{(e)}) + m_o(\mathbf{R}_g^e) \quad (5)$$

$$T'_2 - T'_1 = \sum W'_F + W'_e \quad (6)$$

式(5)中的矩心 O 为刚体相对运动中的固定点或质心,或加速度瞬心;当刚体相对运动的速度瞬心 P 到质心 C 间的距离为常量时,矩心也可取为刚体相对运动的速度瞬心。式(6)中的 W'_e 为刚体牵连带惯性力系学的合力 \mathbf{R}_g^e 在刚体相对运动中所作的功。

2 应用举例

例1 图1a所示的系统在同一铅垂面内。曲柄 OA 长 $r=0.4$ m,以角速度 $\omega=4.5$ rad/s 绕 O 轴匀角速转动。均质杆 AB 长 $2l=1$ m,质量为 $m=10$ g。若不计摩擦,试求当 OA 处于水平位置时, AB 杆的 B 端受到的约束反力。

解:研究 AB 杆。以 A 为原点建立平动参考系,则 AB 杆的相对运动为绕轴心 A 的转动。其牵连带惯性力系的合力 \mathbf{R}_g^e 的大小 $R_g^e = m a_A = m r \omega^2$ 。由运动学知识可得 AB 杆在此瞬时的角加速度 $\varepsilon = 12$ rad/s²,转向为逆时针。于是 AB 杆的受力与运动分析如图1b所示。

根据牵连运动为平动时的刚体定轴转动微分方程,有

$$I_A \varepsilon = \sum m_A(\mathbf{F}^{(e)}) + m_A(\mathbf{R}_g^e)$$

$$\frac{1}{3}m(2l)^2\varepsilon = mgl\cos\alpha - N_B \cdot 2l\cos\alpha + R_g^e l\sin\alpha$$

考虑到 $\sin\alpha = 0.8, \cos\alpha = 0.6$, 即可求得

$$N_B = \frac{109}{3} = 36.3 \text{ N}$$

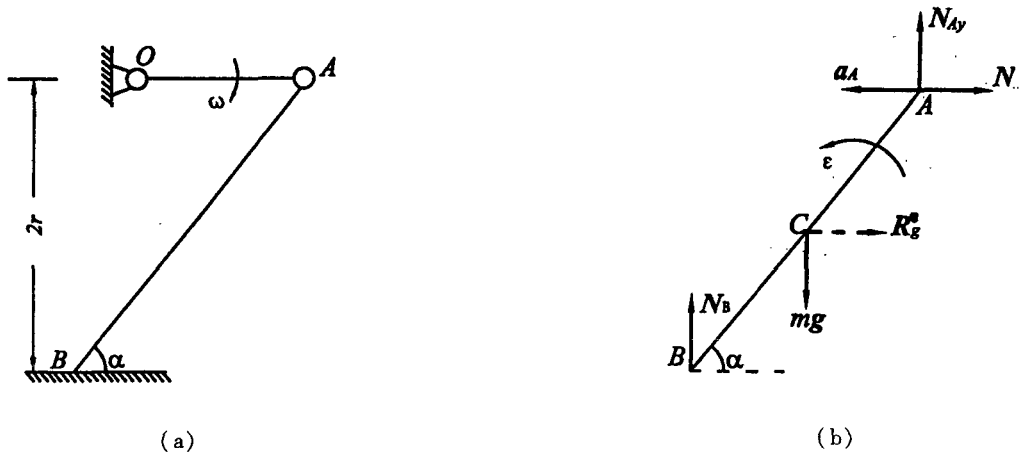


图1 曲柄连杆系统

例2 质量为 m_1 的平板在水平力 T 的作用下沿光滑水平面滑动。置于板上的均质圆柱体质量为 m_2 、半径为 r , 可相对于平板作纯滚动(图2a)。求平板的加速度。

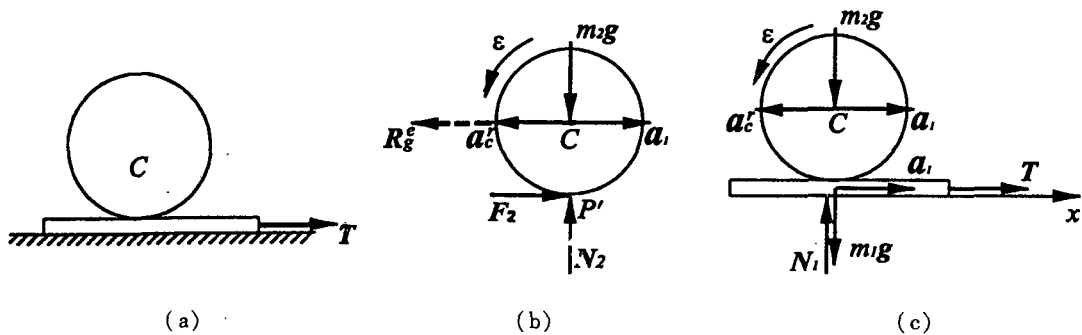


图2 圆柱平板系统

解:先研究圆柱,动系固连于平板,则圆柱的相对运动为纯滚动。设平板的加速度为 a_1 , 则圆柱牵连惯性力系的合力 R_g^e 的大小为 $R_g^e = m_2 a_1$ 。于是圆柱的受力与运动分析如图2b所示。圆柱中心的加速度为 $a_c = a_1 + a_{c_r}$ 。

根据牵连运动为平动时刚体相对于速度瞬心的动量矩定理,有

$$I_{P'}\varepsilon = m_{P'}R_g^e, \quad \frac{3}{2}m_2 r^2 \varepsilon = R_g^e r$$

可解得 $\varepsilon = \frac{2a_1}{3r}$ 。则 $a_{c_r} = r\varepsilon = \frac{2}{3}a_1$ 。

再研究系统,受力与运动分析如图2c所示。根据质心运动定理,有

$$\begin{aligned} \Sigma ma_x &= \Sigma X, \\ m_1 a_1 + m_2 (a_1 - a_{c_r}) &= T. \end{aligned}$$

即可求得平板的加速度 $a_1 = \frac{3T}{3m_1 + m_2}$ 。

例3 平板车底板上放置一半径为 r 的均质圆柱体,其质心 C 到底板边缘的距离为 l , 如图3a所示。现令平板车以匀加速度 a 沿水平直线路面行驶。若圆柱体可沿底板作纯滚动,试求圆柱体在刚滚离底板时的角速度大小。

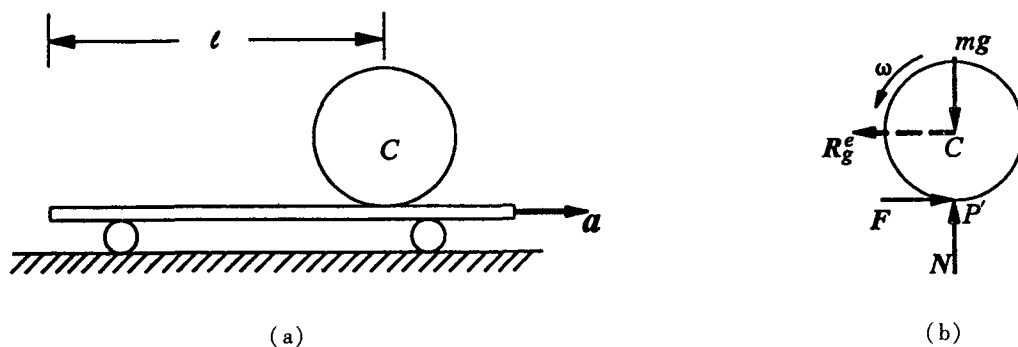


图3 均质圆柱体在平板车上的滚动

解:研究圆柱体,动系固连于平板车,则圆柱体的相对运动为纯滚动。设圆柱体的质量为 m , 则其牵连惯性力系的合力 R_g^e 的大小为 $R_g^e = ma$ 。于是圆柱体的受力与运动分析如图 3b 所示。

根据牵连运动为平动时刚体相对运动的动能定理,有

$$T_2 - T_1 = W_e,$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} mr^2 \omega^2 - 0 = R_g^e l$$

即可求得圆柱体在刚滚离底板时的角速度大小为 $\omega = \frac{2\sqrt{3al}}{3r}$ 。

3 结语

通过上述三例可见,应用牵连运动为平动时的相对运动动力学普遍定理,求解牵连运动为平动时的刚体相对运动动力学问题较为简单方便。之所以简便,是因为求解时可根据题意,通过恰当地选取研究对象和灵活恰当地选用相应的定理,从而使建立的方程中出现的未知量较少(主要是使某些未知的约束反力不出现)。

由于牵连运动为平动时的刚体相对运动动力学问题在工程中极为常见,因此,牵连运动为平动时的刚体相对运动动力学普遍定理不仅具有一定的理论意义,而且也具有重要的应用价值。

参考文献:

[1] 杜庆华. 工程力学手册[M]. 北京:高等教育出版社,1994.
 [2] 冯立富,王良桂,夏之英. 理论力学[M]. 西安:陕西科学技术出版社,1996.
 [3] Merian J L, Kraige L C. Engineering Mechanics; Vol 2: Dynamics. [M]. 3th ed New York: John Wiley & Sons, 1992

General Theorem for Dynamics of Relatively Motion of Rigid Body When Transport Motion is Translational

FENG Li - fu, GUO Shu - xiang

(The Engineering Institute of the Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract: A general theorem for dynamics of the relatively motion of rigid body, when transport motion is translational, is derived by the basic equation of dynamics of relative motion of a particle. Practical applications of the general theorem are introduced. It is shown that the general theorem is meaningful and useful in theory and practice.

Key words: transport motion; translation motion; rigid body; relative motion; general theorem of dynamics