

结构模糊失效概率的可能性分析

郭书祥, 冯立富, 毕玉泉
(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

摘要:模糊性和随机性是不同的两类不确定性,其产生机理和物理意义均有一定差异。文中基于可能性理论,提出了同时含随机变量和模糊变量时结构的可靠性计算模型。该模型可给出结构模糊失效概率的可能性分布,可更客观、真实地反映结构的实际安全状况。实例计算说明了文中方法的应用。

关键词:随机变量;模糊变量;结构可靠性;可能性

中图分类号: TB114.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2001)04-22-24

在机械和结构系统的分析和设计中,由于各种因素的影响,常不可避免地同时存在随机的和模糊的不确定性。此时,必须同时考虑随机性和模糊性。对此问题,常用的方法是依据 Zadeh 提出的模糊概率计算公式^[1],综合考虑功能状态变量的随机分布和模糊隶属情况,给出一确定的失效概率或可靠度值。本文提出了一种不同的计算模型,将同时含随机变量和模糊变量的结构的失效概率作为模糊变量,可给出模糊失效概率的可能性分布。

1 模糊失效概率计算

在结构可靠性分析中,结构的功能函数通常可表示为

$$M = g(R, S) = R - S \quad (1)$$

式中, R 、 S 分别为结构的广义强度和广义应力,可为其它基本变量的函数。当 R 、 S 均为随机变量时,可用常规的概率可靠性模型^[2]求解。当 R 、 S 均为模糊变量时,可用能度可靠性方法求解。在此仅考虑同时含随机变量和模糊变量的情况。

1.1 R 为模糊变量, S 为随机变量

在实际工程中,结构在未来服役中处于载荷环境一般为随机的,而其强度界限则具有模糊性。因此这是一种较为常见和典型的情况。当已知状态变量 M 的概率密度函数 $f_M(m)$ 及 M 对安全状态的隶属函数 $\mu_A(m)$ 时,可用如下模糊事件的概率计算公式^[1]求解。

$$P_s = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(m) f_M(m) dm \quad (2)$$

当式(1)中 R 、 S 之一为随机变量,另一为模糊变量时,不少学者也直接采用此式计算失效概率。本文认为,考虑到模糊性和随机性的本质区别,在随机载荷作用下,当强度界限具有模糊性时,结构的失效概率也具有模糊性。基于此,可有如下解法。

假设 R 为由 $L-R$ 型模糊数所限定的模糊变量,其可能性分布函数为 $\pi_R(r)$, 则对任一截集水平 α , R 退化为区间变量,其上、下界分别为

$$r^u(\alpha) = (\pi_R^r(r))^{-1}(\alpha), r^l(\alpha) = (\pi_R^l(r))^{-1}(\alpha) \quad (3)$$

式中, $\pi_R^l(r)$ 、 $\pi_R^r(r)$ 分别为可能性分布函数 $\pi_R(r)$ 的左、右分枝。 $(\pi_R(r))^{-1}(\cdot)$ 表示其逆函数。对 R 作如下标准化变换

$$R = r^c(\alpha) + r^l(\alpha)\delta, \quad (4)$$

式中

$$r^c(\alpha) = \frac{r^u(\alpha) + r^l(\alpha)}{2}, \quad r^l(\alpha) = \frac{r^u(\alpha) - r^l(\alpha)}{2} \quad (5)$$

令 $S = s$, 即随机变量 S 取其一确定的样本, 则式(1)可写为

$$M = r^l(\alpha)\delta_r + r^c(\alpha) - s \quad (6)$$

其模糊可靠性指标为

$$\eta(\alpha) = [r^c(\alpha) - s]/r^l(\alpha) \quad (7)$$

当 $\eta(\alpha) \leq 1$ 时, 结构是不可靠的。考虑到 S 的随机性, 结构失效的概率可表为

$$\begin{aligned} P_f(\alpha) &= P\{\eta(\alpha) \leq 1\} = P\{S \geq r^c(\alpha) - r^l(\alpha)\} \\ &= P\{S \geq r^l(\alpha)\} \end{aligned} \quad (8)$$

对不同的 α , 可得相应的失效概率, 从而可得失效概率的可能性分布。如当 S 为正态随机变量, R 的可能性分布为如下正态型时

$$\pi_R(r) = \exp\left\{-\frac{(r - \bar{r})^2}{2\sigma_r^2}\right\} \quad (9)$$

可得

$$P_f(\alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{r^l(\alpha) - \bar{s}}{\sigma_s}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{r} - \bar{s} - \sqrt{-2\ln(\alpha)}\sigma_r}{\sigma_s}\right) \quad (10)$$

这里, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态概率分布函数。

1.2 R 为随机变量、 S 为模糊变量

类似于前述推导过程, 在 $R = r$ 的条件下, 模糊可靠性指标为

$$\eta(\alpha) = [r - s^c(\alpha)]/[s^l(\alpha)] \quad (11)$$

考虑到 r 的随机性, 结构失效的概率可表为

$$P_f(\alpha) = P\{\eta(\alpha) \leq 1\} = P\{R \leq s^u(\alpha)\} \quad (12)$$

从而可得模糊失效概率的可能性分布。其失效概率大于某给定值 P_{f_0} 的可能度为

$$Poss(P_f(\alpha) \geq P_{f_0}) = \sup\{\alpha | P_f(\alpha) \geq P_{f_0}\} \quad (13)$$

这里导出的公式(8)、(12)只用到强度可能性分布的左分枝或应力可能性分布的右分枝。事实上, 虽然模糊性强度或应力本身可采用可能性对称的分布函数形式, 但考虑到 R 、 S 的关系, 广义强度和广义应力的允许范围用分段函数描述^[3-4]更恰当。因而, 这里的结果是合理的。

2 算例

已知某结构的疲劳强度的可能性分布为如下三角形式

$$\pi_R(r) = \begin{cases} 0 & r < 220 \\ \frac{r-220}{40} & 220 \leq r < 260 \\ \frac{300-r}{40} & 260 \leq r \leq 300 \\ 0 & r > 300 \end{cases}$$

作用在结构上随机应力服从正态分布 $N(180, 21.6^2)$ 。由式(8)可得其失效概率的可能性分布情况:

$$\alpha = 0 \text{ 时}, P_f = 3.202 \times 10^{-2}, \alpha = 0.2 \text{ 时}, P_f = 1.352 \times 10^{-2}, \alpha = 0.4 \text{ 时}, P_f = 4.734 \times 10^{-3}$$

$$\alpha = 0.6 \text{ 时}, P_f = 1.508 \times 10^{-3}, \alpha = 0.8 \text{ 时}, P_f = 4.332 \times 10^{-4}, \alpha = 1 \text{ 时}, P_f = 1.06 \times 10^{-4}.$$

若直接代入公式(2), 可得 $P_f = 7.661 \times 10^{-3}$ 。根据失效概率的可能性分布情况, 该结构失效概率大于此值的可能度约为 0.332。

3 结束语

模糊性和随机性是不同的两类不确定性,其产生机理和物理意义均有一定差异。文中研究了同时含随机变量和模糊变量时结构的可靠性计算问题,所提出的计算模型可给出模糊-随机结构模糊失效概率的可能性分布,不同于一般的广义可靠性模型,文中所给失效概率本质上是模糊的。更能客观、真实地反映结构的实际安全状况。

参考文献:

- [1] Furuta H. Fuzz Logic and its contribution to reliability analysis [A]. Rackwitz R, Augusti G. Reliability and Optimization of Structural Systems [C]. London: Chapman & Hall, 1995.
- [2] 孔瑞莲. 航空发动机可靠性工程 [M]. 北京:航空工业出版社, 1996.
- [3] Sawyer J P, Rao S S. Strength - based reliability and fracture assessment of fuzzy mechanical and structural systems [J]. AIAA Journal, 1999, 37(1): 84 - 92.
- [4] 黄洪钟. 基于模糊失效准则的机械结构广义静强度的模糊可靠性计算理论 [J]. 机械强度, 2001, 22(1): 36 - 40.

Analysis on the Possibility of Fuzzy Failure Probability of Fuzzy - Random Mechanical Structures

GUO Shu - xiang, FENG Li - fu, BI Yu - quan

(The Engineering Institute of the Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract: Fuzziness and randomness are two different uncertainties, and often exist in one engineering problem. Based on the possibility theory, a procedure for reliability calculation of the structures that contain both random variables and fuzzy variables is presented in the paper. The possibility distribution of fuzzy failure probability of structures can be given by the proposed model. Being different from some common models, the failure probability of fuzzy - random structures is taken as fuzzy variable, which may indicate the real safety state of structures objectively. The computations of examples illustrate the feasibility and application of the proposed method.

Key words: random variable; fuzzy variable; structural reliability; possibility