第 2 卷第 2 期　　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　　Vol.2 No.2
2001 年 4 月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Apr. 2001

关于 Dirichlet L－函数的一次加权均值

梁放驰， 井爱雯
(空军工程大学 导弹学院，陕西 三原 713800)

摘 要:利用经典的 Kloostermann 和估计及解析方法研究 Dirichlet L－函数的一次加权均值,得到了一个精确的渐近公式。

关键词:广义 Kloostermann;Dirichlet L－函数;渐近公式

中图分类号:O151.4　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2001)02-0088-03

设 $q\geqslant 2$ 是整数,χ 表示模 Q 的 Dirichlet 特征,则对于信息给定的整数 m 及 n,我们定义广义 Kloostermann 和 $S(m,n,\chi,q)$ 如下:

$$S(m,n,\chi,q)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e\left(\frac{ma+n\bar{a}}{q}\right)$$

其中 $\bar{a}$ 表示同余方程 $ab\equiv 1(mod\ q)$ 的解 b,即就是,b 是 a 关于模 q 的逆,且 $e(y)=e^{2\pi iy}$。关于 $S(m,n,\chi,q)$ 的上界估计,许多学者都进行了研究,例如 S. Chowla[1] 和 A. V. Malyshev[2] 已经证明了 $|S(m,n,\chi,p)|\ll(m,n,p)^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$,其中 p 为素数,ε 是任意给定的正数,且 (m,n,p) 表示 m,n 和 p 三个数的最大公因子。对于一般模 q,猜测

$$|S(m,n,\chi,q)|\ll q^{\frac{1}{2}}(m,n,q)^{\frac{1}{2}}d(q) \tag{1}$$

其中 $d(q)$ 是因子函数。但是到目前为止似乎还没有人能够证明这一猜测。我们对(1)式的正确性是深信不疑的。事实上,$S(m,n,\chi,q)$ 在许多数论问题中表现了良好的分布性质。为叙述方便,设 $L(s,\chi)$ 表示对应于 χ 的 Dirichlet L－函数。利用经典 Kloostermann 和估计及其解析方法研究 Dirichlet L－函数一次加权均值渐近性质,其中 $\sum\limits_{\chi\neq\chi_0}$ 表示对模 q 的所有非主特征求和。

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|S(m,n,\chi,q)|^2|L(1,\chi)| \tag{2}$$

有关这种均值,至今还没有人给出任何结果,甚至也不知道(2)式是否有良好的均值分布性质。本文将借助于文献[3]中的思想给出(2)式的一个较为精确的渐近公式。首先,我们引入可乘函数 $r(n)$ 如下:对任意素数 p 及正整数 α,定义 $r(1)=1,r(p^{\alpha})=\binom{2\alpha}{\alpha}/4^{\alpha},\binom{2\alpha}{\alpha}=(2\alpha)!\ /(\alpha!)^2$。对任一正整数 n,当 n 的标准分解式为 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,显然有 $r(n)=\binom{2\alpha_1}{\alpha_1}\binom{2\alpha_2}{\alpha_2}\cdots\binom{2\alpha_k}{\alpha_k}/4^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}$。有了这个可乘函数,我们可以给出下面的定理　设模 $q>2$,则对于任意满足 $(m,q)=(n,q)=1$ 的整数 m 及 n,我们有渐近公式

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|S(m,n,\chi,q)|^2|L(1,\chi)|=\varphi^2(q)\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{r^2(n)}{n^2}+O(q^{\frac{3}{2}+\varepsilon})$$

其中 $\sum\limits_{n}{}'$ 表示对所有与 q 互素的 n 求和,ε 为任意给定的正数。

1 几个引理

为完成定理的证明,我们需要下面几个引理。首先有

收稿日期:2000-03-12
作者简介:梁放驰(1974-),男,陕西兴平人,助教,主要从事基础数学研究.

引理1　设 m,n 和 q 是整数,且 $q\geqslant 2$。则有估计

$$S(m,n,q)=\sum_{a=1}^{q}{}' e\left(\frac{ma+n\bar{a}}{q}\right)\ll (m,n,q)^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}d(q)$$

其中 $\sum\limits^{q}{}'$ 对所有满足 $(a,q)=1$ 的 a 求和,且 $e(y)=e^{2\pi iy}$。

证明(参阅文献[4])。

引理2　对于任意正整数 n,有恒等式

$$\sum_{d\mid q} r(d)r(n/d)=1 \tag{3}$$

证明(参阅文献[3])。

引理3　设模 $q\geqslant 3$,χ 表示模 q 的 Dirichlet 特征。则有估计式

$$\sum_{d\mid q}\sum_{l=1}^{\frac{q-1}{d}} d^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(ld+1)\mid L(1,\chi)\mid\right|=O(q^{1+\varepsilon}),$$

其中 ε 为任意给定的正数。

证明　为书写方便,我们记 $A(\chi,y)=\sum\limits_{q<n\leqslant y}\chi(n)$。于是当 χ 为模 q 的非主特征时,由 Able 恒等式容易推出

$$L(1,\chi)=\sum_{1\leqslant n\leqslant q}\frac{\chi(n)}{n}+\int_{q}^{\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y \tag{4}$$

从而由(4)式我们立刻可得

$$\begin{aligned}&\sum_{d\mid q}\sum_{l=1}^{\frac{q-1}{d}} d^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(ld+1)\mid l,\chi\mid\right|\\&=\sum_{d\mid q}\sum_{l=1}^{\frac{q-1}{d}} d^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(ld+1)\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant q}\frac{\chi(n)}{n}\right|\right|+O\left(\sum_{d\mid q}\sum_{l=1}^{\frac{q-1}{d}} d^{\frac{1}{2}}\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\int_{q}^{\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\right|\right)\end{aligned} \tag{5}$$

现在我们分别估计(5)式中的各项。

(1)首先令 $D(n,q)=\sum\limits_{\substack{st=n\\1\leqslant s\leqslant q}} r(s)r(t)$,于是由引理2知当 $N\leqslant q$ 时有 $D(n,q)=1$。因而有

$$\left(\sum_{n\leqslant q}\frac{r(n)\chi(n)}{n}\right)^2=\sum_{n\leqslant q}\frac{\chi(n)}{n}+\sum_{q<n\leqslant q^2}\frac{D(n,q)\chi(n)}{n} \tag{6}$$

由此容易得到

$$\begin{aligned}&\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(ld+1)\left|\sum_{n\leqslant q}\frac{\chi(n)}{n}\right|\\&=\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(ld+1)\left|\sum_{n\leqslant q}\frac{r(n)\chi(n)}{n}\right|^2+O\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{q<n\leqslant q^2}\frac{D(n,q)\chi(n)}{n}\right|\right)\\&=\varphi(q)\sum_{\substack{n\leqslant q\\n(ld+1)\equiv m(q)}}\sum_{m\leqslant q}{}'\frac{r(n)r(m)}{nm}+O(q^{\frac{1}{2}}\ln q)\end{aligned} \tag{7}$$

注意到(7)式同余式 $n(ld+1)\equiv m(q)$ 中的 $n\neq m$,否则有 $ld+1\equiv 0(q)$,与 $l\leqslant\frac{q-1}{d}$ 矛盾。于是由(7)式可得

$$\begin{aligned}&\sum_{d\mid q}\sum_{l=1}^{\frac{q-1}{d}} d^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(ld+1)\left|\sum_{n=1}^{q}\frac{\chi(n)}{n}\right|\right|\\&\ll\varphi(q)\sum_{d\mid q}\sum_{l=1}^{\frac{q-1}{d}} d^{\frac{1}{2}}\sum_{\substack{n\leqslant q\\n(ld+1)\equiv m(q)}}\sum_{m\leqslant q}{}'\frac{r(n)r(m)}{nm}+\sum_{d\mid q}\sum_{l=1}^{\frac{q-1}{d}} d^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\ln q\\&\ll\varphi(q)\sum_{d\mid q} d^{\frac{1}{2}}\sum_{n\leqslant q}\sum_{s\leqslant\frac{q}{d}}\frac{r(n)r(sd+n)}{n(sd+n)}+q^{1+\varepsilon}\ll q^{1+\varepsilon}\end{aligned} \tag{8}$$

(2)由 Pólya-Vinogradov 定理知,对任意 $y\geqslant 1$ 有 $|A(\chi,y)|\ll q^{\frac{1}{2}}\ln q$。从而有

$$\sum_{d\mid q}\sum_{l=1}^{\frac{q-1}{d}} d^{\frac{1}{2}}\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\int_{q}^{\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}\mathrm{d}y\right|\ll\sum_{d\mid q}\sum_{l=1}^{\frac{q-1}{d}} d^{\frac{1}{2}\varphi(q)}\int_{q}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}}\ln q}{y^2}\mathrm{d}y\ll q^{1+\varepsilon} \tag{9}$$

结合(5),(8)及(9)式立刻得到

$$\sum_{d|q}\sum_{l=1}^{\frac{q-1}{d}} d^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(ld+1)\ |\ L(1,\chi)\ |\right| = O(q^{1+\varepsilon})$$

于是完成了引理 3 的证明。

由 Dirichlet L－函数的定义,仿照引理 3 的证明方法,有

引理 4 设模 $q>2$,则有渐近公式

$$\sum_{\chi\neq 0}\ |\ L(1,\chi)\ |\ = \varphi(q)\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{r^2(n)}{n^2} + O(q^{\frac{1}{2}}\ln q)$$

2 定理的证明

首先由广义 Kloostermann 和的定义有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi\neq\chi_0} |\ S(m,n,\chi,q)\ |^2\ |\ L(1,\chi)\ | \\
&= \sum_{r=1}^{q}{}'\sum_{s=1}^{q}{}'\left(\frac{r(1-\bar{s})m+\bar{r}(1-s)n}{q}\right)\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(s)\ |\ (l,\chi)\ | \\
&= \varphi(q)\sum_{\chi\neq\chi_0} |\ L(1,\chi)\ | + \sum_{s=2}^{q}{}'\sum_{r=1}^{q}{}' e\left(\frac{r(1-\bar{s})m+\bar{r}(1-s)n}{q}\right)\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(s)\ |\ L(1,\chi)\ | \qquad (11)
\end{aligned}$$

注意到$(m,q)=(n,q)=(s,q)=1$ 及$(1-s,q)=(s\bar{s}-s,q)=(s(\bar{s}-1),q)=(\bar{s}-1,q)$,于是有$(s-1,\bar{s}-1,q)=(s-1,q)$,因而由(11)式,引理 1,引理 3 及引理 4 立刻得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi\neq\chi_0} |\ S(m,n,\chi,q)\ |^2\ |\ L(1,\chi)\ | = \varphi^2(q)\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{r^2(n)}{n^2} + O(q^{\frac{3}{2}+\varepsilon}) + \\
&O\left(q^{\frac{1}{2}}d(q)\sum_{s=2}^{q}{}'(s-1,q)^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(s)\ |\ L(1,\chi)\ |\right|\right) = \\
&\varphi(q)\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{r^2(n)}{n^2} + O(q^{\frac{3}{2}+\varepsilon}) + O\left(q^{\frac{1}{2}}d(q)\sum_{d|q}\sum_{l=1}^{\frac{q-1}{d}} d^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(ld+1)\ |\ L(1,\chi)\ |\right|\right) = \\
&\varphi^2(q)\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{r^2(n)}{n^2} + O(q^{\frac{3}{2}}+e)
\end{aligned}$$

于是完成了定理的证明。

参考文献:

[1] Chowla S. On Kloostermann's sum[J]. Norkse Selbsk. Fak. Frondheim,1967,40(16):70－72.

[2] Malyshev A V. A generalization of Kloostermann sums and their estimates(in Russian)[J]. Vestnik Leningrad Univ.,1960,15(3)59－75.

[3] 任建华,张文鹏. 关于 L－函数的一次均值[J]. 四川大学学报,1989,26(增刊):75－79.

[4] Estermann T. On Kloostermann's sum[J]. Mathematic,1961,8(2):83－86.

On the First Power Mean of Dirichlet L－function with the Weight of General Kloostermann Sums

LIANG Fang-chi, JING Ai-wen

(The Missile Institute of the Air Force Engineering University(AFEU.), Sanyuan 713800,China)

Abstract: The main purpose of this paper is using the classical estimation of Kloostermann sum and the analytic method to study the first power mean of Dirichlet L－functions with the weight of general Kloostermann sums, and giving a sharp asymptotic formula.

Key words: general Kloostermann sum; Dirichlet L－functions; asymptotic formula.