第 2 卷第 1 期　　空 军 工 程 大 学 学 报（自然科学版）　　Vol. 2 No. 1
2001 年 2 月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Feb. 2001

AR(p)模型参数的 Bayes 估计及分布

申卯兴，　王献锋
（空军工程大学 导弹学院，陕西 三原　713800）

摘　要：利用 Jeffrey 模糊先验原理，通过分析 AR(p)模型参数的概率分布密度函数，在二次损失下，参数的 Bayes 估计可以转化为 LS 估计，并给出参数的后验概率分布。

关键词：自回归模型；Bayes 参数估计；概率密度函数；后验概率分布
中图分类号：O211. 61　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-3516(2001)01-0090-02

设 p 阶平稳自回归模型 AR(p) 为 $w_t = \varphi_1 w_{t-1} + \varphi_2 w_{t-2} + \cdots \varphi_p w_{t-p} + \alpha_t,\quad \alpha_t \sim iidN(0,\sigma_a^2)$ 并记 $\boldsymbol{W}_n' = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$，$\phi' = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p)$ 分别为样本向量、参数向量。取 AR(p)模型参数的似然函数为 $L(\phi, \sigma_a | \boldsymbol{W}_n) = \sigma_a^{-n} f(\phi) \exp\left\{-\dfrac{S(\phi)}{2\sigma_a^2}\right\}$

其中 $S(\phi) = \sum_{t=1}^{n} [a_t | \boldsymbol{W}_n, \phi]^2$，$[a_t | \boldsymbol{W}_n, \phi]$ 表示 a_t 的以 $\boldsymbol{W}_n, \phi$ 为已知的条件期望，有时简记为 $[a_t]$。

对于参数 ϕ, σ_a 依 Jeffrey 模糊先验原理及 σ_a^2 与 ϕ 的不相关性，可选取 ϕ, σ_a 的先验概率密度函数具有如下形式[1~2]　$P(\phi, \sigma_a) = |I(\phi)|^2 \sigma_a^{-1}$
其中 $I(\phi)$ 为参数 ϕ 的 Fisher 信息(阵)。

这样，依 Bayes 原理得 ϕ, σ_a 的后验概率密度函数为 $P(\phi, \sigma_a | \boldsymbol{W}_n) \propto P(\phi, \sigma_a) L(\phi, \sigma_a | \boldsymbol{W}_n) = \sigma_a^{-(n+1)} |I(\phi)|^{\frac{1}{2}} f(\phi) \exp\left\{-\dfrac{S(\phi)}{2\sigma_a^2}\right\}$

可以证明积分 $I_0 = \int_0^{+\infty} x^{-(n+1)} e^{-\frac{c}{2x^2}} dx$ 收敛，且其值 $I_0 \propto C^{-\frac{n}{2}}$，($C$=常数)，那么，对上式两边同时取积分 $\int_0^{+\infty} P(\phi, \sigma_a | \boldsymbol{W}_n) d\sigma_a$ 得 $P(\phi | \boldsymbol{W}_n) \propto |I(\phi)|^{\frac{1}{2}} f(\phi) \{S(\phi)\}^{-\frac{n}{2}}$

特别地，当 $n \gg 1$ 或 n 达到适当大时，$P(\phi | \boldsymbol{W}_n)$ 的支配项为 $\{S(\phi)\}^{-\frac{n}{2}}$，而 $|I(\phi)|^{\frac{1}{2}}$ 与 $f(\phi)$ 可以略去[3]，从而 $P(\phi | \boldsymbol{W}_n) \propto \{S(\phi)\}^{-\frac{n}{2}}$ 这就表明了 ϕ 的分布是一种椭球类分布。

文献[4]中指出，当 ϕ, σ_a 广义先验为 Jeffrey 先验时，在二次损失 $l(\phi, \hat{\phi}) = (\phi - \hat{\phi})^2$ 下，ϕ 的 Bayes 估计就是其 LS 估计 ϕ，即从

$$\min S(\phi) = \phi'_u \boldsymbol{D} \phi_u$$

可得

$$\hat{\phi} = \boldsymbol{D}_p^{-1} \boldsymbol{d}$$

其中

$$\phi_u = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \phi \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} D_{12} \\ D_{13} \\ \vdots \\ D_{1,p+1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{D}_p = \begin{bmatrix} D_{22} & \cdots & D_{2,p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{2,p+1} & \cdots & D_{p+1,p+1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & -d' \\ -d & D_p \end{bmatrix}$$

$$D_{ij} = D_{ji} = w_i w_j + w_{i+1} w_{j+1} + \cdots + w_{n+1-i} w_{n+1-j}$$

这里，$S(\phi) = S(\hat{\phi}) + S(\phi) - S(\hat{\phi}) = v \cdot \dfrac{S(\phi)}{v} + (\phi - \phi)' \boldsymbol{D}_p (\phi - \phi) = v S_a^2 + (\phi - \hat{\phi})' \boldsymbol{D}_p (\phi - \hat{\phi})$

收稿日期：2000-04-01
作者简介：申卯兴(1961-)，男，陕西合阳人，副教授，硕士，主要从事军事运筹学和军事系统工程研究．

式中，$S_a^2=\dfrac{S(\phi)}{v}$为 a_t 的方差的无偏估计量($v=n-p$)，

$$S(\hat{\phi})=D_{11}-2\phi'd+\phi'\boldsymbol{D}_p\hat{\phi}=D_{11}-2\phi'(\boldsymbol{D}_p\phi)+\phi'\boldsymbol{D}_p\hat{\phi}=D_{11}-\phi'\boldsymbol{D}_p\hat{\phi}=D_{11}-d'\boldsymbol{D}_p^{-1}d$$

因此，可得参数 ϕ 的后验概率密度为

$$P(\phi|\boldsymbol{W}_n)\propto\{S(\phi)\}^{-\frac{n}{2}}\propto\left\{1+\frac{(\phi-\hat{\phi})'\boldsymbol{D}_p(\phi-\phi)}{vS_a^2}\right\}^{-\frac{n}{2}}$$

该式等价地为

$$P(\phi|W_n)\propto\left\{1+\frac{\frac{1}{2}\sum_i\sum_j S_{ij}(\varphi_i-\varphi_i)(\varphi_j-\varphi_j)}{vS_a^2}\right\}^{-\frac{n}{2}}$$

式中，$S_{ij}=\dfrac{\partial^2 S(\phi)}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}=2D_{i+1,j+1}$。即 AR(p)的参数向量 ϕ 的后验概率分布为自由度为 $v=n-p$ 的多元 t 分布，即 $\phi\sim t(\phi,S_a^2\boldsymbol{D}_p^{-1},v)$。特别，当 $p=1$ 时，对 AR(1)模型来讲，$\dfrac{\phi-\phi}{S_{\hat{\phi}}}\sim t(n-1)$，式中，$\phi=\dfrac{D_{12}}{D_{22}}$，$S_{\hat{\phi}}^2=\dfrac{S_a^2}{D_{22}}=\dfrac{1}{n-1}\dfrac{D_{11}}{D_{22}}\left(1-\dfrac{D_{12}^2}{D_{11}D_{22}}\right)$， $S_{\hat{\phi}}=\sqrt{S_{\hat{\phi}}^2}$，当样本为大样本时，$S_{\hat{\phi}}$趋向于$\left\{\dfrac{1-\phi^2}{n}\right\}^{\frac{1}{2}}$。

参考文献：

[1] Press S James. Bayesian Statistics：Principles Models，And Applications[M]. New York：John Wiley& Sons Inc，1989.

[2] Jeffreys H. Theory of Probability，(3rd ed)[M]. Oxford：Clarardon Press，1961.

[3] Box G E P，Jenkins G M. Time Series Analysis，forcastıng and controd(Rev ed)[M]. San Francısco：Holden - Day，1976.

[4] 吕亚芹. 一类具有椭球白噪声的时间序列的 Bayes 分析[D]. 西安：西安交通大学，1990.

Bayesian estimate of model AR(p) coefficients and its posterior distribution

SHEN Mao-xıng， WANG Xian-feng

(Missile Instıtute， AFEU.， Sanyuan 710038， China)

Abstract：The Bayesıan estımate of model AR(p) coefficients may be transformed into the LS estımate under a quadratic loss by the Jeffrey fuzzy prıor principle through analysis of the probability distribution densıty functıon， and the posterıor distribution ıs gıven.

Key words：autoregressıve model； bayesıan estımate； probability distribution densıty functıon； posterıor probability distribution