第 2 卷第 1 期　　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　　Vol. 2 No. 1
2001 年 2 月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Feb. 2001

一类系数含阶梯函数的优化问题

刘亚安[1]， 管晓宏[2]

(1. 空军工程大学 工程学院，陕西 西安　710038；2. 西安交通大学 系统工程研究所，陕西 西安　710049)

摘　要：研究了一类系统含阶梯函数的优化问题。通过将原问题分解为三个线性规划的子问题，得到子问题的解后，对子问题的解进行集成得到原问题的解析解。文中针对阶梯函数会出现的特殊情形进行了讨论。

关键词：非线性规则；阶梯函数；优化

中图分类号：O232　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-3516(2001)01-0077-03

近年来，全球电力业都在进行业内改组，改组的中心基本上都是电力市场化。市场化在电力业内引进了竞争机制，给电力业带来了新的生机和活力。新的改组给各电力公司和用电企业提出了新的机遇和挑战，同时也提出了很多新的课题[1~2]。现在这种改组成功的一个典型范例是美国加州的电力市场。加州市场从 1998 年 4 月开始运行，包括日市场(day-ahead market)，时市场(hour-head market)和实时市场(realtime market)三个市场[3~4]。对于一个用电商。将面临在新的市场结构下如何制订自己的购电策略，以使总购电费用最小的问题。本文即以此为背景，对购电商的市场分配问题进行研究。

1　问题的描述

在研究市场中投资分配问题时，我们遇到这样一个问题

$$\begin{gathered}\min\sum_{i=1}^{3}C_i\\ \text{s.t. } p_1+p_2+p_3=P\end{gathered}\tag{1}$$

式中，$C_i, i\in\{1,2,3\}$是三个市场的购买费用。

第 1、2 市场中，价格与购买量成线性关系，设

$$\lambda_1=k_1p_1+b_1\tag{2}$$

$$\lambda_2=k_2p_2+b_2\tag{3}$$

第 3 市场中，价格与购买量之间的关系为

$$\lambda_3=\begin{cases}b_3^+ & p_2\geqslant 0\\ b_3^- & p_3<0\end{cases}\tag{4}$$

式中，$\lambda_i, i\in\{1,2,3\}$为三个市场的价格，$p_i, i\in\{1,2,3\}$为三个市场的购买量。$k_i, b_i, i\in\{1,2\}, b_3^+, b_3^-$ 都为大于零的常数。则

$$C_1=k_1p_1^2+b_1p_1\tag{5}$$

$$C_2=k_2p_2^2+b_2p_2\tag{6}$$

$$C_3=\lambda_3p_3\tag{7}$$

用 C 表示三个市场的总费用，问题(1)成为

$$\begin{gathered}\min C=k_1p_1^2+b_1p_1+k_2p_2^2+b_2p_2+\lambda_3p_3\\ \text{s.t. } p_1+p_2+p_3=P\end{gathered}\tag{8}$$

是非线性规划问题。该问题的特殊性在于 λ_3 含有 p_3 的阶梯函数，可表示为[5]

收稿日期：2000-09-29
基金项目：国家“863”计划资助项目(863-511-9845-004)；国家自然科学基金资助项目(59937150)
作者简介：刘亚安(1965-)，男，安徽阜南人，讲师，博士生，主要从事复杂系统的智能优化与决策研究.

$$\lambda_3 = b_3^+ - (b_3^+ - b_3^-)U_+(-p_3)$$

式中 $U_+(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ 1 & x>0\end{cases}$,为非对称单位阶梯函数。因而不能用常规的非线性规划方法解。

2 问题的解法

对问题(8),我们通过以下方法解决。

1)把问题(8)变为以下三个子问题:

$$\min C_1 = k_1p_1^2 + b_1p_1 + k_2p_2^2 + b_2p_2 + b_3^+p_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}p_1 + p_2 + p_3 = P\\ p_3 > 0\end{cases} \tag{8a}$$

$$\min C_2 = k_1p_1^2 + b_1p_1 + k_2p_2^2 + b_2p_2 + b_3^+p_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}p_1 + p_2 + p_3 = P\\ p_3 = 0\end{cases} \tag{8b}$$

$$\min C_3 = k_1p_1^2 + b_1p_1 + k_2p_2^2 + b_2p_2 + b_3^-p_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}p_1 + p_2 + p_3 = P\\ p_3 < 0\end{cases} \tag{8c}$$

子问题(8a)、(8c)为有等式约束和不等式约束的非线性规划问题,子问题(8b)为有等式约束的非线性规划问题。

2)分别解上述三个子问题

这三个子问题用常规非线性方法可解[6]。

设 $b_3^+>b_3^-$,解分别为,子问题(8a)当 $P>(b_3^+-b_1)/2k_1+(b_3^+-b_2)/2k_2$ 时有解,

$$\text{解为}\begin{cases}p_1 = (b_3^+ - b_1)/2k_1\\ p_2 = (b_3^+ - b_2)/2k_2\\ p_3 = P - (b_3^+ - b_1)/2k_1 - (b_3^+ - b_2)/2k_2\\ C_{1\min} = b_3^+P - (b_3^+ - b_1)^2/4k_1 - (b_3^+ - b_2)^2/4k_2\end{cases} \tag{9a}$$

子问题(8b)当 $(b_3^- -b_1)/2k_1+(b_3^- -b_2)/2k_2\leqslant P\leqslant(b_3^+-b_1)/2k_1+(b_3^+-b_2)/2k_2$ 时有解,

$$\text{解为}\begin{cases}p_1 = (2k_2P + b_2 - b_1)/2(k_1 + k_2)\\ p_2 = (2k_1P + b_1 - b_2)/2(k_1 + k_2)\\ p_3 = 0\\ C_{2\min} = k_1k_2/(k_1 + k_2)[P + (b_1/k_2 + b_2/k_2)/2]^2 - (b_1^2/k_1 + b_2^2/k_2)/4\end{cases} \tag{9b}$$

子问题(8c)当 $P<(b_3^- -b_1)/2k_1+(b_3^- -b_2)/2k_2$ 时有解,

$$\text{解为}\begin{cases}p_1 = (b_3^- - b_1)/2k_1\\ p_2 = (b_3^- - b_2)/2k_2\\ p_3 = P - (b_3^- - b_1)/2k_1 - (b_3^- - b_2)/2k_2\\ C_{3\min} = b_3^-P - (b_3^- - b_1)^2/4k_1 - (b_3^- - b_2)^2/4k_2\end{cases} \tag{9c}$$

3)综合三个子问题的解,可得问题(8)的解。

3 讨论

1)上述公式是在 $b_3^+>b_3^-$ 的情形下导出的。

2)当 $b_3^+=b_3^-=b_3$ 时,问题(8)退化为

$$\min C_1 = k_1p_1^2 + b_1p_1 + k_2p_2^2 + b_2p_2 + b_3p_3$$
$$\text{s.t.}\ p_1 + p_2 + p_3 = P \tag{10}$$

为有等式约束的非线性规划,解为

$$\begin{cases} p_1 = (b_3 - b_1)/2k_1 \\ p_2 = (b_3 - b_2)/2k_2 \\ p_3 = P - (b_3 - b_1)/2k_1 - (b_3 - b_2)/2k_2 \\ C_{\min} = b_3 P - (b_3 - b_1)^2/4k_1 - (b_3 - b_2)^2/4k_2 \end{cases} \tag{11}$$

3）当 $b_3^+ < b_3^-$ 时，设问题(8)在 p_1, p_2, p_3 处得到最优解 $C_{\min}$，对 p_3 进行处理，令 $p_3 = p_3 + \Delta P - \Delta P, \Delta P > 0$，仍满足原问题的约束条件，但这种情况下

$$C = k_1 p_1^2 + b_1 p_1 + k_2 p_2^2 + b_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = k_1 p_1^2 + b_1 p_1 + k_2 p_2^2 + b_2 p_2 + b_3^+ p_3 + b_3^+ \Delta P - b_3^- \Delta P = C_{\min} + (b_3^+ - b_3^-)\Delta P < C_{\min}$$

与前假设 $C_{\min}$为最优解矛盾，故，当 $b_3^+ < b_3^-$ 时无解。这种情形在实际市场中意味着买入价小于卖出价，如果购电商预估准确，则可在第三市场大量申报购进，同时大量申报卖出，理论上说，通过价格差可以无限降低成本或获利，因而，这种情形没有费用最小值。

4 结束语

我们研究美国加州电力市场的竞标问题时遇到一类系数中含有阶梯函数的优化问题，本文对该类问题进行了研究，得出了解析解。所得到的解析解将被直接应用于研究电力市场中的竞标问题；另外，市场中的买电商为使总购电费用最小，需要决策在不同市场中的买电量，该研究也可为其决策提供理论依据。虽然该研究以美国加州电力市场为背景，但在中国实现电力市场化后，将会遇到同样的问题，该研究对市场中的类似问题也将有实际价值。

参考文献：

[1] Alvey T, Goodwin D, Ma X, et al. A Security-Constrained Bid-Clearing System for the New Zealand Wholesale Elecricity Market[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1998, 13(3): 986 - 991.
[2] Carpentier P, Cohen G, Culioli J, Stochastic Optimization of Unit Commitment: a New Decompoition Framework[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1996, 11(2): 1067 - 1073.
[3] Johnson R B, Oren S O, Svoboda A J. Equity and Efficiency of Unit Commitment in Competitive Electricity Markets[J]. Utilities Policy, 1997, 6(1): 9 - 19.
[4] Li C, Yan R, Zhou J. Stochastic Optimization of Interconnected Multireservoir Power Systems[J]. IEEE Transactions on Power System, 1990, 5(4): 1487 - 1494.
[5] 科恩 A，科恩 M. 数学手册[M]. 北京：工人出版社，1987.
[6] David G Luenberger. Linear and Nonlinear Programming[M]. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1984.

Study on a kind of optimization containing step function in coefficient

LIU Ya-an[1], GUAN Xiao-hong
(1. The Engineering Institute, AFEU., Xi'an, 710038, China;
2. Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049, China)

Abstract: A kind of optimization containing step function in coefficient is studied in this paper. The solution is drawn out by means of parting the problem into three sub-problems, dealing with each sub-problem and integrating the solutions of three sub-problems. The solution for optimization based on other cases of step function is also discussed.

Key words: nonlinear programming; ladder function; optimization