第1卷第4期　空军工程大学学报(自然科学版)　Vol.1 No.4
2000年10月　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　Oct. 2000

一类紧支小波的正则性的研究

赵海燕[1]， 应益容[2]
(1.空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安 710077；2.西北建筑工程学院，陕西 西安 710061)

摘　要：提出了一类新的具有紧支集的标准正交小波基以及相关的尺度函数的构造方法，准确估计了该类小波和相关尺度的正则性指数。

关键词：小波函数；尺度函数；正则性
中图分类号：O174.3　**文献标识码**：A　**文章编号**：1009-3516(2000)04-0059-04

众所周知，Meyer 小波和 Batlle－Lemarie 小波的正则性比较容易估计[1-3]，由于 Meyer 小波具有紧致的 Fourier 变换，因此它的正则性属于 C^{∞}，而 Battle－Lamarie 小波是 k 次样条函数，在结点处具有 $(k-1)$ 阶的连续导数。相比之下，紧支撑正交小波的正则性则难以确定，尤其是具有非整数 Hölder 指数的小波更是如此，本文对一类新的具有紧支集的标准正交小波基及其相关的尺度函数提出了一类新的构造方法，并准确估计了该类小波和相关尺度的正则性指数，所得的结果优于 DaubechiesI 的估计。

1　引理

引理 1[4]　若 $A(\omega)$ 是正的只含余函的三角函数的多项式

$$A(\omega)=\sum_{n=0}^{N}a_n\cos n\omega$$

其中 $a_N\neq 0, a_n\in R, n=0,1,\cdots,N$，则存在一个实系数的三角多项式

$$B(\omega)=\sum_{n=0}^{N}b_n c^{in\omega}(b_N\neq 0)\text{，使得 }A(\omega)=|B(\omega)|^2$$

引理 2　多项式 $P_N(x)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}\binom{N-1+n}{n}x^n$ 满足不等式

i)　$$x^{-N+1}P_N(x)\geqslant y^{-N+1}P_N(y)\qquad(0\leqslant x\leqslant y)\tag{1}$$

ii)　$$P_N(x)\leqslant 2^{N-1}\max(1,2x)^{N-1}\qquad(0<x<1)\tag{2}$$

证明　i)当 $0\leqslant x\leqslant y$ 时

$$x^{-N+1}P_N(x)=\sum_{n=0}^{N-1}\binom{N-1+n}{n}x^{-(N-1-n)}\geqslant\sum_{n=0}^{N-1}\binom{N-1+n}{n}y^{-(N-1-n)}=y^{-N+1}P_N(y)$$

ii)由于多项式 $P_N(x)$ 满足如下函数方程

$$x^N P_N(1-x)+(1-x)^N P_N(x)=1$$

令 $x=\frac{1}{2}$，容易得出 $P_N\left(\frac{1}{2}\right)=2^{N-1}$。对于 $x\leqslant\frac{1}{2}$，由于 $P_N(x)$ 是增函数，故

$$P_N(x)\leqslant P_N\left(\frac{1}{2}\right)=2^{N-1}$$

对于 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 利用不等式(1)可得 $P_N(x)\leqslant 2^{N-1}x^{N-1}P_N\left(\frac{1}{2}\right)=2^{N-1}(2x)^{N-1}$，故不等式(2)成立。

引理 3　对所有的自然数 $N\geqslant 1$，$P_N(y)$ 满足如下不等式：

收稿日期：1999-12-17
作者简介：赵海燕(1959-)，男，陕西西安人，讲师，主要从事应用数学方面研究．

i) $$P_N(y) \leqslant P_N\left(\frac{3}{4}\right) \qquad \left(0 \leqslant y \leqslant \frac{3}{4}\right) \tag{3}$$

ii) $$P_N(y)P_N[4y(1-y)] \leqslant \left[P_N\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2 \qquad \left(\frac{3}{4} \leqslant y \leqslant 1\right) \tag{4}$$

证明 i)注意到 $P_N(y)$在$[0,1]$上是增函数,故不等式(3)显然成立。

ii)定义函数 $f(y)=P_N(y)P_N[4y(1-y)]$,则有 $f'(y)=\frac{N}{(1-y)(2y-1)}g(x)$

这里 $$g(y) = P_N(y)P_N[4y(1-y)](6y-5) - y^{N-1}(2y-1)P_N(1)P_N[(1-y)] + 4(1-y)[4y(1-y)]^N P_N(1)P_N(y)$$

由于当 $y \geqslant \frac{3}{4}$时,不等式 $4y(1-y) \leqslant y$,由式(1)可得

$$[4(1-y)]^{N-1}P_N(y) \leqslant P_N[4y(1-y)]$$

将此不等式代入 $g(y)$的表达式中,便有

$$g(y) \leqslant (6y-5)P_N[4y(1-y)] \cdot [P_N(y) - y^{N-1}P_N(1)]$$

由于上述不等式右端方括弧中的表达式等于$\frac{1}{N}(1-y)P'_N(y) \geqslant 0 \quad (y \leqslant 1)$

因此得知,当$\frac{3}{4} \leqslant y \leqslant \frac{5}{6}$时,$g(y) \leqslant 0$。

这就说明 $P_N(y)P_N[4y(1-y)]$是$\left[\frac{3}{4},\frac{5}{6}\right]$上的减函数,故式(4)在 $y \leqslant \frac{5}{6}$时成立。

当$\frac{5}{6} \leqslant y \leqslant 1$ 且 $N \leqslant 12$ 时,容易验证式(4)成立。以下证明 $N \geqslant 13$ 时的情形

由式(1)可知,只需证明如下不等式成立即可:

$$\left(\frac{4y}{3}\right)^{N-1} P_N[4y(1-y)] \leqslant P_N\left(\frac{3}{4}\right) \tag{5}$$

注意到此时不等式

$$P_N[4y(1-y)] \leqslant [1-4y(1-y)]^{-N} = (2y-1)^{-2N}$$

$$P_N\left(\frac{3}{4}\right) \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{N-1} P_N(1) \geqslant \frac{1}{\sqrt{N}} 3^{N-1}$$

均成立,故我们只须证明

$$\left[\frac{y}{(2y-1)^2}\right]^{N-1}(2y-1)^{-2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{9}{4}\right)^{N-1} \tag{6}$$

既可保证不等式(5)成立,显见$(2y-1)^{-2}$和 $y(2y-1)^{-2}$均在$\left[\frac{5}{6},1\right]$上单调递减,因此只要式(6)对 $y=\frac{5}{6}$成立即可,即$\left(\frac{5}{6}\right)^{N-1} \leqslant \frac{4}{9\sqrt{N}}$。显然,当 $N \geqslant 13$ 时上述不等式成立。

2 定理

依文献[5],从奇多项式出发可以构造一类新的小波,如取

$$R(x) = a_1 x + a_3 x^3 \qquad (a_1 \geqslant 0, a_3 \geqslant 0, a_1 + a_3 = 1)$$

则函数 $$P(x) = P_N(x) + x^N R\left(\frac{1}{2} - x\right) \tag{7}$$

满足文献[3]的要求。给定 a_1,a_2,和 N,就有

$$|Q_R(e^{-i\omega})|^2 = \sum_{n=0}^{N-1}\binom{N-1+n}{n}\sin^{2n}\frac{\omega}{2} + \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2N} R\left(\frac{1}{2}\cos\omega\right) \tag{8}$$

因此利用文献[4]可以把 $Q_R(e^{-i\omega})$求出来,进而确定文献[5]中的 $H(\omega)$这样便得到一类新的小波函数和相关的尺度函数,分别记作 Φ_R 的 Φ_R,则它们的 Fourier 变换的表达式为

$$\hat{\Phi}_R(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\omega), \quad \hat{\Phi}_R(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{9}$$

其中 $$H(\omega)=\left[\frac{1}{2}(1+e^{-i\omega})\right]^N\cdot Q(e^{-i\omega}),\quad G(\omega)=e^{-i\omega}\overline{H(\omega+\pi)}$$

考虑函数 $|Q_R(e^{-i\omega})Q_R(e^{-i\frac{\omega}{2}})|$ 的上确界，记为 M_2

$$M_2^2=\sup_{\omega\in R}|Q_R(e^{-i\omega})Q_R(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2=\sup_{\omega\in R}\left|P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)P\left(\sin^2\frac{\omega}{4}\right)\right|$$

记 $y=\sin^2\frac{\omega}{4}$，$z=4y(1-y)$，则由引理 2 和引理 3 可得到

$$\begin{aligned}M_2^2=&\sup_{y\in[0,1]}|P(z)P(y)|=\sup_{y\in[0,1]}|P_N(z)+z^N(a_1z+a_3z^3)||P_N(y)+y^N(a_1y+a_3y^3)|\\ \leqslant&\sup_{y\in[0,1]}|P_N(z)P_N(y)|+2^{2N}\\ \leqslant&N^2\cdot 2^{4N-2}\left(\frac{16}{27}\right)^N+2^{2N}\end{aligned}$$

注意到不等式 $$N\cdot 2^{N-1}=\left(\frac{32}{16}\right)^N\cdot\frac{N}{2}\geqslant\left(\frac{27}{16}\right)^N\cdot\frac{N}{2}\geqslant\left(\frac{27}{16}\right)^N\quad(N\geqslant 2)$$

故 $$M_2<2^N\left[N\cdot 2^{N-1}\left(\frac{16}{27}\right)^{N/2}+1\right]=N\cdot 2^N\left[\frac{1}{2}\left(\frac{16}{27}\right)^{N/2}+\frac{1}{N\cdot 2^N}\right]<N\cdot 2^{2N}\left(\frac{16}{27}\right)^{N/2}$$

因此，由文献[4]可得

$$|\hat{\Phi}_R(\omega)|=\left|\prod_{j=1}^{\infty}H(2^{-j}\omega)\right|=C(1+|\omega|)^{-N+\log_2 M_2}=C(1+|\omega|)^{(2-\log_2 3\sqrt{3})N+o(\ln N)}\tag{10}$$

所以，由式(10)得出已构造出的尺度函数的特征 $\hat{\Phi}_R(\omega)\in C^{\mu N+o(\ln N)}$，$\mu=(\log_2 3\sqrt{3})-2$

根据 $\Phi_R(x)$ 和 $\varphi_R(x)$ 的关系，容易得出 $\hat{\Phi}_R(\omega)\in C^{\mu N+o(\ln N)}$，$\mu=(\log_2 3\sqrt{3})-2$

表 1 给出了最初的 N 值与正则性指数 β_N 的关系：

表 1　N 与 β_N 的关系

N	2	3	4	5	6	7	8	9
β_N	0.755	1.132	1.150	1.877	2.265	2.642	3.020	3.397

当 $N\to\infty$ 时，我们可以得出如下的渐近式

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\beta_N}{N}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\log_2 3\right)-2\right]\cdot N+o(\ln N)}{N}=\left(\frac{3}{2}\log_2 3\right)-2\approx 0.377444\cdots$$

由此可见 N 越大，正则性指数越高，这些正则性指数只与 N 有关，而与 a_1,a_3 无关，为了准确估计 β_N 的范围，我们给出如下结果

定理 1　若 $|Q_R(x)|$ 上有界，且 $\sup_t\left|\prod_{k=0}^{m-1}q_r(e^{-i2^k t})\right|^{\frac{2}{m}}=q_1$，则

$$\beta_N\geqslant 2N-\log_2 2q_1$$

证明　记 $M(x)=\int_0^t\left|\sin^2\frac{t}{2}\right|^N\cdot|Q_R(t)|^2\mathrm{d}t$，$Q_R(x)$ 的上界为 Q，依定理条件及等式

$$Q_R(2t)=q_R(e^{-it})Q_R(t)$$

可得 $$M(2^m\cdot 2\pi)=2^m\int_0^{2\pi}|\sin(2^{m-1}t)|^N\cdot|Q_R(t)|^2\cdot\left|\prod_{k=0}^{m-1}q_R(e^{-i2^k t})\right|^2\mathrm{d}t$$

$$\leqslant 2^m q_1^m Q^2\int_0^{2\pi}|\sin(2^{m-1}t)|^N\mathrm{d}t=2^m q_1^m\cdot Q^2\cdot\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\cdot 2\pi$$

即对 $x\geqslant 1$，有 $M(x)\leqslant C\cdot x^{\log_2 2q_1}$，其中 $C=Q^2\cdot\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\cdot(2\pi)^{-\log_2 q_1}$

记 $M^\beta=\{f;\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}|^2(1+|\omega|)^\beta\mathrm{d}t\leqslant\infty\}$，显见当 $2\alpha-\beta<-1$ 时，$M^\beta\subset C^\alpha$。

记 β_N 是所有这样 β 的上确界，则 β 使得 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\Phi}_R|^2(1+|t|)^\beta\mathrm{d}t<\infty$

由于 $$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}_R(t)|^2|t|^\beta \mathrm{d}t = 2\left(\int_0^1 |t|^\beta|\hat{\varphi}_R(t)|^2\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}|t|^\beta|\hat{\varphi}_R(t)|^2\mathrm{d}t\right)$$

因此,要使上述积分存在,只需上式第二项积分收敛即可,即

$$\int_1^{+\infty}|\hat{\varphi}_R(t)|^2|t|^\beta \mathrm{d}t < \infty \tag{11}$$

注意到存在 $\varepsilon>0$,使 $M(t)=C\cdot t^{\log_2 2q_1-\varepsilon}$,故有

$$2^{-2N}\int_1^{+\infty}|\hat{\varphi}_R(t)|^2|t|^\beta\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}|t|^{\beta-2N}\left|\sin^2\frac{t}{2}\right|^N\cdot|Q_R(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$= t^{\beta-2N}\cdot M(t)\Big|_1^{+\infty} + (2N-\beta)\int_1^{+\infty}t^{\beta-2N-1}\cdot M(t)\mathrm{d}t$$

$$= t^{\beta-2N+\log_2 2q_1-\varepsilon}\Big|_1^{+\infty} + (2N-\beta)\int_1^{+\infty}t^{\beta-2N-1}\cdot M(t)\mathrm{d}t$$

要使积分(11)式成立,β 满足不等式 $\beta-2N+\log_2 2q_2\geqslant 0$,即有 $\beta_N\geqslant 2N-\log_2 2q_1$

同理,我们有

定理 2 若 $|Q_R(x)|$ 有非零下界,且 $\inf_t\left|\prod_{k=0}^{m-1}q_R(e^{-i2^k t})\right|^{\frac{2}{m}}=q_2$ 则 $\beta_N\leqslant 2N-\log_2 2q_2$

比较可以看出,本文的估计方法优于文献[1]的方法。

参考文献:

[1] Daubtechies I. Ten lectures on wavelets[M]. philadelphia:CBMSNSF Series in Applied Math SLAM Publ, 1992.

[2] Chui C K. An introduction to wavelets[M]. U S A: Academic Press, 1992.

[3] 程正兴. 小波分析算法与应用[M]. 西安:西安交通大学出版社,1998.

[4] Polyga G, Szego G. Aufgaoben and Lehrsatze aus der analysis[J]. Berlin:Springer, 1971.

[5] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. Comm Pure and Appl Math, 1998, 41:909-996.

On the Regularity of a Kind of Compactly Supported Wavelet

ZHAO Hai-yan[1], ING Yi-rong[2]

(1. The Telecommunication Engineering Institute, AFEU., Xi'an 710077, China;

2. Northwestern Architetural Engineering Institute, Xi'an 710061, China)

Abstract: The method about constructure of a new compactly supported orthonormal wavelet and scale function concerned is put forward and the exponent regularity of the kind of wavelet and related scale function is estimated accurately.

Key words: wavelet function; scale function; regularity