离散 Hopfield 网络的稳定性

马润年，　杨友社
(空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安　710077)

摘　要:神经网络的稳定性是神经网络应用的基础。主要研究离散 Hopfield 神经网络的稳定性,所获结果推广了已有的结论,并结合网络状态图举例可直观地说明结果。

关键词:离散 Hopfield 神经网络;稳定性;能量函数;网络状态图
中图分类号:TP183　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2000)04-0039-03

1　DHNN 模型及能量函数

具有 n 个神经元的 DHNN,其拓扑结构可以由一个 $n\times n$ 的阶矩阵 $\boldsymbol{W}=(w_{ij})_{n\times n}$ 和一个 n 维列向量 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_n)^T$ 所唯一确定,并记为 $N=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{\theta})$。若用 $x_i(t)$ 表示神经元 i 在时刻 t 所处的状态,并且只有两种:兴奋用 $x_i(t)=1$ 表示和抑制用 $x_i(t)=-1$ 表示,$t\in\{0,1,2,\cdots\}$。DHNN 的并行演化方程(或并行运行方程)为:

$$x_i(t+1)=\operatorname{sgn}\Big(\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_j(t)+\theta_i\Big),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其中

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\geqslant 0\\ -1, & 若\ x<0\end{cases} \tag{2}$$

若令 $\boldsymbol{X}(t)=(x_1,\cdots,x_n)^T$,$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_n)^T$,$\boldsymbol{W}=(w_{ij})_{n\times n}$,则(1)式可以写成:

$$\boldsymbol{X}(t+1)=\operatorname{sgn}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{\theta}) \tag{3}$$

设 $N=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{\theta})$是一 DHNN,$N$ 从初态 $\boldsymbol{X}(t_0)$开始,经过一个有限的时刻之后,网络的输出不再发生变化,即:

$$\boldsymbol{X}(t+1)=\boldsymbol{X}(t) \tag{4}$$

则称此网络处于稳定状态(或称稳定状态),并称此网络关于初始状态 $\boldsymbol{X}(t_0)$收敛(或稳定)。若网络关于任何的初态都收敛,则称网络是稳定的。若 $\boldsymbol{X}$ 是 DHNN $N=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{\theta})$的一个稳定状态,则

$$\boldsymbol{X}=\operatorname{sgn}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\theta}) \tag{5}$$

有时也把满足(5)式的 $\boldsymbol{X}$ 称为网络 N 的稳定吸引子或简称为吸引子。

设 $N=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{\theta})$是一 n 阶 DHNN,$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_r$ 是 $r(\geqslant 2)$个 2 值(-1 和 1)n 维列向量,若

$$\boldsymbol{X}_{j+1}=\operatorname{sgn}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}_j+\boldsymbol{\theta}),\boldsymbol{X}_1=\operatorname{sgn}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}_r+\boldsymbol{\theta})\quad j=1,2,\cdots,r-1 \tag{6}$$

且 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_r$ 两两互不相同,则称 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_r$ 为网络 N 的一个周期为 r 的极限环吸引子,记为$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_r)$,简称环吸引子或极限环。

对于 n 阶的 DHNN,所有可能的状态集,记为 $\boldsymbol{B}^n$,它就是所谓的 Boole 空间:

$$\boldsymbol{B}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T: x_i=1,-1,1\leqslant i\leqslant n\} \tag{7}$$

DHNN $N=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{\theta})$称为对称的,如果 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}^T$(转置),$N$ 称为反对称的,如果 $\boldsymbol{W}=-\boldsymbol{W}^T$。

对于 n 阶 DHNN $N=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{\theta})$,其网络状态图 $\boldsymbol{G}_N$,它是一个 2^n 阶的定向图。$\boldsymbol{G}_N$ 的顶点集为 $\boldsymbol{B}^n$,定向弧集为:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}_N)=\{(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{X}_j): \boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{X}_j\in\boldsymbol{B}^n,且\ \boldsymbol{X}_j=\operatorname{sgn}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{\theta})\} \tag{8}$$

于是 $\boldsymbol{G}_N$ 的汇点对应于 N 的稳定点,$\boldsymbol{G}_N$ 的有向圈对应于 N 的极限环。

DHNN 的稳定性研究长期困扰着人们,Hopfield 首先引进能量函数

$$E=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_i(t)x_j(t)-\sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i(t)$$

收稿日期:2000-03-20
作者简介:马润年(1963-),男,陕西绥德人,副教授,博士生,主要从事图论、神经网络及遗传算法研究.

$$= -\frac{1}{2}(X(t))^T W X(t) - \theta^T X(t) \tag{9}$$

许多人用

$$\Delta E = E(X(t+1)) - E(X(t)) \leqslant 0 \tag{10}$$

来证明网络的稳定性,$E(t)$显然有界,即用$E(t)$的单调下降有界,或用$\Delta E(t) \leqslant 0$来证明网络(1)的稳定性,这在数学上是通不过的。比如,对于反对称DHNN,$\theta_1 = \cdots = \theta_n = 0$,若能量函数$E(t) \equiv -\frac{1}{2}(X(t))^T W X(t)$,则$E(t) \equiv 0$。这是因为$(X^T W X)^T = X^T W^T X = -X^T W X$($W$反对称),所以$X^T W X \equiv 0$。显然$\Delta E(t) \equiv 0$。按照上述观点,可以说反对称DHNN是稳定的,这显然不符合实际情况。事实上,对于式(9)所给的能量函数,或其它形式的能量函数,有下面的引理1。

2 主要结果

引理1[1] 对于DHNN(1),若所给能量函数式(9)满足

$$\Delta E \begin{cases} < 0, \text{若 } X(t+1) \neq X(t) \\ = 0, \text{若 } X(t+1) = X(t) \end{cases} \tag{11}$$

则网络(1)是并行稳定的。

定理1 对任何的正定矩阵$\beta = \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$,使$\overline{W} = \beta W$,$\bar{\theta} = \beta\theta$,则网络(12)

$$X(t+1) = \mathrm{sgn}(\overline{W} X(t) + \bar{\theta}) \tag{12}$$

与网络(1)的稳定性相同。

证明

$$x_i(t+1) = \mathrm{sgn}\Big(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j(t) + \theta_i\Big) = \mathrm{sgn}\Big(\sum_{j=1}^{n} \beta_i w_{ij} x_j(t) + \beta_i \theta_i\Big)$$

$$= \mathrm{sgn}\Big(\sum_{j=1}^{n} \bar{w}_{ij} x_j(t) + \bar{\theta}_i\Big) \tag{13}$$

由此知网络(13)与网络(1)的稳定性相同,即网络(12)与网络(1)的稳定性相同。

虽然这个定理的证明非常简单,但是结果非常有用,利用此可得出很多结论。

定理2 若$\theta = 0$,且W满足

$$w_{i1} + w_{i2} + \cdots + w_{in} = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{14}$$

则状态$(1,1,\cdots,1)^T$是网络(1)的稳定状态,且$(-1,-1,\cdots,-1)^T$吸引到状态$(1,1,\cdots,1)^T$。

证明 因为 $W(1,1,\cdots,1)^T = (0,0,\cdots,0)^T, W(-1,-1,\cdots,-1)^T = (0,0,\cdots,0)^T$

所以 $\mathrm{sgn}(W(1,1,\cdots,1)^T) = (1,1,\cdots,1)^T, \mathrm{sgn}(W(-1,-1,\cdots,-1)^T) = (1,1,\cdots,1)^T$

这说明状态$(1,1,\cdots,1)^T$是网络(1)的稳定状态,且$(-1,-1,\cdots,-1)^T$吸引到状态$(1,1,\cdots,1)^T$。

推论1[5] 若网络(1)是反对称的,且$\theta = 0$,W满足

$$w_{i1} + w_{i2} + \cdots + w_{in} = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

则状态$(1,1,\cdots,1)^T$是反对称网络(1)的稳定状态,且$(-1,-1,\cdots,-1)^T$吸引到状态$(1,1,\cdots,1)^T$。

定理3 若$\theta = 0$,$\forall X \in B^n$,WX无零分量,且存在正定矩阵$\beta = \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$,使$\overline{W} = \beta W$反对称,则网络(1)收敛于周期为4的极限环。

证明

$$x_i(t+1) = \mathrm{sgn}\Big(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j(t)\Big) = \mathrm{sgn}\Big(\sum_{j=1}^{n} \beta_i w_{ij} x_j(t)\Big)$$

$$= \mathrm{sgn}\Big(\sum_{j=1}^{n} \bar{w}_{ij} x_j(t)\Big) \tag{15}$$

则网络(15)的能量函数为

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i(t)\, \bar{w}_{ij} x_j(t+1) = -\frac{1}{2} X^T(t) \overline{W} X(t+1) \tag{16}$$

则

$$\Delta E(t) = E(t+1) - E(t) = -\frac{1}{2} X^T(t+1) \overline{W} X(t+2) + \frac{1}{2} X^T \overline{W} X(t+1)$$

$$= -\frac{1}{2}(X(t+2) + X(t))^T \overline{W} X(t+1)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i(t+2) + x_i(t))\, \overline{H}_i(t+1) \tag{17}$$

其中 $\overline{H}(t+1)=\sum_{j=1}^{n}\overline{w}_{ij}x_j(t+1)\neq 0$。当 $x_i(t+2)=1$ 时，$x_i(t+2)+x_i(t)\geqslant 0$，$\overline{H}_i(t+1)>0$；当 $x_i(t+2)=-1$ 时，$x_i(t+2)+x_i(t)\leqslant 0$，$\overline{H}_i(t+1)<0$。所以 $\Delta E\leqslant 0$，并且 $\Delta E=0$ 的充分与必要条件是式(17)中的每一项都为零，即 $\boldsymbol{X}(t+2)+\boldsymbol{X}(t)=0$。很显然，网络(15)收敛于 $\Delta E=0$ 所对应的状态，即 $\boldsymbol{X}(t+2)+\boldsymbol{X}(t)=0$，也就是 $\boldsymbol{X}(t+2)=-\boldsymbol{X}(t)$。所以，当 t 充分大时，有

$$\boldsymbol{X}(t+4)=-\boldsymbol{X}(t+2)=\boldsymbol{X}(t) \tag{18}$$

并且易证 $\boldsymbol{X}(t)$，$\boldsymbol{X}(t+1)$，$\boldsymbol{X}(t+2)$，$\boldsymbol{X}(t+3)$ 两两互不相同。因此网络(15)并行收敛于收敛于长度为 4 的极限环，也就是网络(1)并行收敛于收敛于周期为 4 的极限环。

推论 2[2,5]　若网络(1)是反对称的，且 $\forall\ \boldsymbol{X}\in B^n$，$\boldsymbol{WX}$ 无零分量，$\theta=0$，则网络(1)收敛于周期为 4 的极限环。

例　$\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ -1 & 0 & 4\\ 4 & -8 & 0\end{pmatrix}$，$\theta=0$，取 $\beta_1=\frac{1}{2}$，$\beta_2=1$，$\beta_3=\frac{1}{2}$，易验证满足定理 3 的条件。

事实上　$sgn\boldsymbol{W}(-1,-1,-1)^T=(1,-1,1)^T$，　$\mathrm{sgn}\boldsymbol{W}(1,-1,1)^T=(-1,1,1)^T$

$\mathrm{sgn}\boldsymbol{W}(-1,1,1)^T=(-1,1,-1)^T$，　$\mathrm{sgn}\boldsymbol{W}(-1,1,-1)^T=(1,-1,-1)^T$

$\mathrm{sgn}\boldsymbol{W}(1,-1,-1)^T=(1,-1,1)^T$，　$\mathrm{sgn}\boldsymbol{W}(1,1,-1)^T=(1,-1,-1)^T$

$\mathrm{sgn}\boldsymbol{W}(-1,-1,1)^T=(-1,1,1)^T$，　$\mathrm{sgn}\boldsymbol{W}(1,1,1)^T=(-1,1,-1)^T$

从上面的计算可知网络(1)确实并行收敛于周期为 4 的极限环，其网络状态图如图所示，其中，圆圈中的数字表示相应状态的十进位表示，如 $3=(-1,1,1)^T$，$0=(-1,-1,-1)^T$ 等等。从图 1 可直观地看出网络(1)收敛于周期为 4 的极限环，且任何状态只需一步即可达到极限环上。

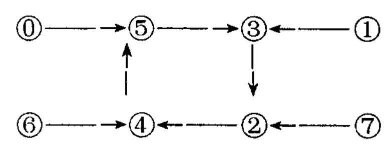

图 1　网络状态图

参考文献：

[1] Goles, Eogelman F, Pellegrin D. Decreasing energy functions as a tool for studying threshod Networks[J]. Discrete Appl Math, 1985, 12:261 - 277.

[2] Goles E. Antisymmetrical neural networks[J]. Discrete Appl Math, 1986, 13:97 - 100.

[3] Lee D L. New stability condotions for Hopfield neural neural networks in partial simultaneous update mode[J]. IEEE Trans Neural Networks, 1999, 10(4):975 - 978.

[4] 廖晓昕，昌　莉，沈　轶. 离散 Hopfield 神经网络的稳定性研究[J]. 自动化学报，1999，25(6)：721 - 727.

[5] 许　进，保　铮. 反对称离散 Hopfield 网络的稳定性理论[J]. 电子学报，1999，27(1)：103 - 107.

The Stability of Discrete Hopfield Networks

MU Run-nian, YANG You-she

(The Telecommunication Engineering Institute, AFEU., Xi'an 710077, China)

Abstract: The stability of neural networks is the bases of the neural networks in various applications. We mainly study the stability of discrete Hopfield neural networks, the obtained results generalize the existing conclusion and the result can be shown intuitively combined with an example with state graph of the networks.

Key words: discrete Hopfield neural networks; stability; energy function; state graph of the networks