第1卷第3期　　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　　Vol. 1 No. 3
2000年8月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Aug. 2000

一类反应扩散方程的边界积分方程

李炳杰，　孙　锁
(空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安　710077)

摘　要:应用广义函数的Fourier积分变换导出一类反应扩散方程的基本解,在此基础上得到边界积分方程,消除了边界元计算中边界积分方程的区域积分项。

关键词:反应扩散方程;Fourier 积分变换;基本解;边界积分方程
中图分类号:O241.8　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2000)03-0090-02

反应扩散方程的数学模型是一类半线性抛物型方程(组),该方程涉及大量物理学,化学,生物学数学模型,具有强烈的实际应用背景。对抛物型方程初边值问题的数值求解,近年来已有许多学者做过大量的工作,文献[1]、[2]针对二维抛物型方程分别利用Laplace方程基本解和抛物型方程基本解进行了边界元方法研究,并在处理方程中出现的区域积分项过程中运用了非常巧妙的方法。本文涉及的方程是生物群体动力学反应扩散问题,该方程是一类带反应项的非齐抛物型方程,因此,利用文献[1]、[2]的方法求解数值解时,由于非齐反应项会使边界积分方程中产生新的区域积分,给数值求解带来极大的不便。本文利用广义函数的Fourier积分变换直接导出方程的基本解,利用该基本解得到的边界积分方程可顺利实现文献[1]、[2]的数值算法。

1　Fourier 积分变换的实施

设 $\Omega\subset R^2$ 是光滑有界的正则开子集,边界为 Γ,考虑反应扩散方程的 Dirichlet 初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}-d\Delta u(x,t)+ku(x,t)=0 & (x,t)\in\Omega\times R^+\\ u(x,0)=u_0(x) & x\in\Omega\\ u(x,t)=u_0(x,t) & (x,t)\in\Gamma\times R^+\end{cases}\tag{1}$$

这里 $d>0$ 是扩散系数,ku 是反应项(非齐项)。

先求全平面上下述定解问题(Cauchy 问题)的解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x-y,t)}{\partial t}-d\Delta u(x-y,t)+ku(x-y,t)=0\\ u(x-y,t)|_{t=0}=\delta(x-y)\end{cases}\tag{2}$$

这里 $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in R^2,t\in R^+,\delta$ 为狄拉克(Dirac)函数。

关于 $x-y$ 实施 Fourier 积分变换得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{u}(\omega,t)}{\partial t}+d\omega^2\tilde{u}(\omega,t)+k\tilde{u}(\omega,t)=0\\ \tilde{u}(\omega,t)|_{t=0}=F(\delta(x-y))=1\end{cases}\tag{3}$$

其中

$$\omega=(\omega_1,\omega_2),\qquad \omega^2=\omega_1^2+\omega_2^2$$
$$\tilde{u}(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x-y,t)e^{i\omega(x-y)}d(x-y)$$
$$d(x-y)=d(x_1-y_1)d(x_2-y_2)$$

收稿日期:1999-12-19
作者简介:李炳杰(1963-),男,甘肃会宁人,讲师,主要从事偏微分方程边界元数值解法研究.

求解带有参数 ω 的常微分方程初值问题(3)得

$$\tilde{u}(\omega,t)=\mathrm{e}^{-(d\omega^2+k)t} \tag{4}$$

利用 Fourier 逆变换求 $\tilde{u}(\omega,t)$ 的原象有

$$u(x-y,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{e}^{-d\omega^2t}\mathrm{e}^{-i\omega(x-y)}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 \tag{5}$$

$$u(x-y,t)=\frac{1}{4\pi dt}\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4dt}} \tag{6}$$

其中 $r=|x-y|=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2$

2 边界积分方程

由文献[3],问题(1)的基本解为

$$u^*(x-y,t-\tau)=\frac{1}{4\pi d(t-\tau)}\mathrm{e}^{-k(t-\tau)}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4d(t-\tau)}} \tag{7}$$

满足

$$\frac{\partial u^*}{\partial t}-d\Delta u^*+ku^*=\delta(x-y,t-\tau) \tag{8}$$

(1)式两端同乘以 $u^*(x-y,t-\tau)$ 且关于 x,τ 积分

$$\int_0^t\int_\Omega\left(u^*\frac{\partial u}{\partial t}-du^*\Delta u+ku^*u\right)\mathrm{d}\Omega_x\mathrm{d}\tau=0 \tag{9}$$

(8)式两端同乘以 $u(x,t)$ 且关于 x,τ 积分

$$\int_0^t\int_\Omega\left(u\frac{\partial u^*}{\partial t}-du\Delta u^*+kuu^*\right)\mathrm{d}\Omega_x\mathrm{d}\tau=\int_0^t\int_\Omega u\delta(x-y,t-\tau)\mathrm{d}\Omega_x\mathrm{d}\tau=u(y,t)$$

$$y\in\Omega\quad t\in R^+ \tag{10}$$

用(10)式减去(9)式并由 Green 公式及文献[2]可得初边值问题(1)的边界积分方程为

$$u(y,t)=\int_\Omega u_0u_0^*\mathrm{d}\Omega_x+d\int_\Gamma\int_0^t\left(u^*\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial u^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\Gamma_x$$

$$y\in\Gamma\quad t\in R^+ \tag{11}$$

其中 n 是边界 Γ 上点的单位外法向量,$u_0=u_0(x)$,$u_0^*=u^*(x-y,t)$。

通过边界积分方程(11),利用文献[2]的理论可顺利实现(1)的边界元数值计算,对问题(1)的相应 Neumann 边值问题亦可通过边界积分方程(11)进行数值求解。

参 考 文 献

[1] SINGH K M,KALRA S. Application of Cubic Hermitian Algorithms to Boundary Element Analysis of Heat Conduction[J]. International Journal for Numerical Methods In Engineering,1995,38:2639-2651.

[2] DAVEY K,BOUNDS S. Source-weighted Domain Integral Approximation For Liner Transient Heat Conduction International[J]. Journal for Numerical Methods In Engineering,1996,39:1775-1790.

[3] 复旦大学数学系. 数学物理方程[M]. 上海:上海科学技术出版社,1981.

Boundary Integral Equation for a Class of Reaction Diffusion Equation

LI Bing-jie, SUN Suo

(The Telecommunication Engineering Institute,AFEU. ,Xi'an 710077,China)

Abstract: In this paper,The fundamental solution of a class of reaction diffusion equation is derived by means of Fourier integral transformation of generalized function. On the basis of the above,the boundary integral equation is established. The result of this paper have been developed in a method for elimination of domain integral appearing in the boundary integral equation.

Key words: Reaction diffusion equation;Fourier integral transformation;Fundamental solution;Boundary integral equation