第1卷第3期　　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　　Vol.1 No.3
2000年8月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Aug. 2000

一种特殊长度的离散 Hartley 变换的快速算法

张小水，　赵全习
(空军工程大学 导弹学院，陕西 三原　713800)

摘　要:对特殊长度 3^l 的离散 Hartley 变换提出一种新快速算法,这是一种将长度 3^l 转换为长度 3^{l-1} 的离散 Hartley 变换的递归算法,和目前已知的其它算法相比较,结构更简单,运算量也更少。

关键词:信号处理;快速算法;离散 Hartley 变换
中图分类号:O51.811　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2000)03-0055-04

离散 W 变换(DWT)是由王中德1985年提出,现已广泛应用于频谱分析,数据压缩,图像处理,卷积计算等领域,但他与Fourier 变换一样,其使用依赖于一定的快速算法。自从DWT 提出以后,由于其优越性,许多人对其进行研究,也提出了不少快速算法,如离散余弦－正弦变换算法,直接分解法,分裂基算法等等。

Hartley 变换是由著名数字家 Hartley 提出的一种正交变换,后来,Bracewell 研究了离散 Hartley 变换(DHT),它实际上作为后来 DWT 的一种特殊形式,1994年,IEEE 会刊(Proceeding of IEEE)还出了一期关于 Hartley 变换的专刊,可见 DHT 在通信与信号处理中有着重要的应用。3^l 长度的 DHT 是信号处理中常用的特殊的重要情形,本文针对这种特殊长度的特点提出一种新算法,使 3^l 长度 DHT 计算更简便,运算量更少,从而计算机更容易实现。

1　算法结构

设 $N=3^l$,则实序列 $x(n)(n=0,1,2,\cdots,N-1)$ 的 DHT 定义为:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N}\qquad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

设 $C_u(k)=X(3k+u)\qquad u=0,1,2,k=0,1,2,\cdots,\frac{N}{3}-1$,则当 $k=0\sim\frac{N}{3}-1$ 时,计算 $X(k)$ 时只需要计算$C_u(k)$即可。

(1)$C_u(k)$的计算方法

$$C_0(k)=X(3k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi n3k}{N}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N/3}$$

当 $n=0\sim\frac{N}{3}-1$ 时

$$C_0(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1}(\sum_{i=0}^{2}x(n+\frac{iN}{3})\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N/3}),$$

令
$$x_0(n)=\sum_{i=0}^{2}x(n+\frac{iN}{3}),$$

则
$$C_0(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1}x_0(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N/3},(k=0\sim\frac{N}{3}-1)$$

此式正是一长度为$\frac{N}{3}$ 的 DHT。

令
$$D_1(k)=C_1(k)+C_2(k-1),$$

收稿日期:2000-01-29
作者简介:张小水(1958-),女,辽宁沈阳人,副教授,硕士,主要从事快速算法研究.

则
$$D_1(k)=X(3k+1)+X(3k-1)$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[\mathrm{cas}\,\frac{2\pi n(3k+1)}{N}+\mathrm{cas}\,\frac{2\pi n(3k-1)}{N}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N/3}+\frac{2\pi n}{N}\right)+\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N/3}-\frac{2\pi n}{N}\right)\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left[2x(n)\cos\frac{2\pi n}{N}\right]cas\left(\frac{2\pi nk}{N/3}\right)$$

类似于 $C_0(k)$ 的计算,得到
$$D_1(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1}\left[\sum_{i=0}^{2}2x(n+\frac{iN}{3})\cos\frac{2\pi(n+\frac{iN}{3})}{N}\right]\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N/3}\right),$$

令
$$x_1(n)=\sum_{i=0}^{2}2x(n+\frac{iN}{3})\cos\frac{2\pi(n+\frac{iN}{3})}{N},$$

则
$$D_1(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1}x_1(n)\mathrm{cas}\,\frac{2\pi nk}{N/3},(k=0\sim\frac{N}{3}-1),$$

特别
$$D_1(0)=D_1(\frac{N}{3}),$$

$D_1(k)$ 也是一长度为$\frac{N}{3}$ 的 DHT。

类似可以推出
$$C_1(k)-C_2(k-1)=X(3k+1)-X(3k-1)$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[\mathrm{cas}\,\frac{2\pi n(3k+1)}{N}-\mathrm{cas}\,\frac{2\pi n(3k-1)}{N}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}2x(n)\sin\frac{2\pi n}{N}\left[\cos\frac{2\pi nk}{N/3}-\sin\frac{2\pi nk}{N/3}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1}x'_1(n)\left[\cos\frac{2\pi nk}{N/3}-\sin\frac{2\pi nk}{N/3}\right],$$

其中
$$x'_1(n)=\sum_{i=0}^{2}2x(n+\frac{iN}{3})\sin\frac{2\pi(n+\frac{iN}{3})}{N},$$

设
$$D'_1(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1}x'_1(n)\mathrm{cas}\,\frac{2\pi nk}{N/3},(k=0\sim\frac{N}{3}-1)。$$

这是长度为$\frac{N}{3}$ 的 DHT

则由
$$D'_1(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1}x'_1(n)\left[\cos\frac{2\pi nk}{N/3}+\sin\frac{2\pi nk}{N/3}\right],$$

得到
$$D'_1(\frac{N}{3}-k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1}x'_1(n)\left[\cos\frac{2\pi n(\frac{N}{3}-k)}{N/3}+\sin\frac{2\pi n(\frac{N}{3}-k)}{N/3}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1}x'_1(n)\left[\cos\frac{2\pi nk}{N/3}-\sin\frac{2\pi nk}{N/3}\right]$$
$$=C_1(k)-C_2(k-1),$$

特别
$$D'_1(0)=D'_1(N/3),$$

由
$$D_1(k)=C_1(k)+C_2(k-1);$$
$$D'_1(\frac{N}{3}-k)=C_1(k)-C_2(k-1),$$

得
$$C_1(k)=\frac{1}{2}\left[D_1(k)+D'_1(\frac{N}{3}-k)\right],(k=0\sim\frac{N}{3}-1),$$

$$C_2(k-1)=\frac{1}{2}\Big[D_1(k)-D'_1(\frac{N}{3}-k)\Big],(k=1\sim\frac{N}{3}-1),$$

综上得 $C_0(k)$、$C_1(k)$、$C_2(k-1)$ 的计算公式，它们都是由长度为 $\frac{N}{3}$ 的 DHT 的计算和一些附加运算组成的，是一种递归型的快速算法。

(2) $x_0(n)$、$x'_1(n)$、$x_1(n)$ 的计算

$x_0(n)$、$x'_1(n)$ 和 $x_1(n)$ 的运算即是附加的一些运算。可以如下计算。

因为
$$\cos\frac{2\pi(n+\frac{iN}{3})}{N}=\cos\Big(\frac{2\pi n}{N}+\frac{2\pi i}{3}\Big)$$
$$=\cos\frac{2\pi n}{N}\cos\frac{2\pi i}{3}-\sin\frac{2\pi n}{N}\sin\frac{2\pi i}{3},$$
$$\sin\frac{2\pi(n+\frac{iN}{3})}{N}=\sin\frac{2\pi n}{N}\cos\frac{2\pi i}{3}+\cos\frac{2\pi n}{N}\sin\frac{2\pi i}{3},$$

所以
$$x_1(n)=2\Big[\sum_{i=0}^{2}x(n+\frac{iN}{3})\cos\frac{2\pi i}{3}\Big]\cos\frac{2\pi n}{N}-2\Big[\sum_{i=0}^{2}x(n+\frac{iN}{3})\sin\frac{2\pi i}{3}\Big]\sin\frac{2\pi n}{N},$$

同理有
$$x'_1(n)=2\Big[\sum_{i=0}^{2}x(n+\frac{iN}{3})\cos\frac{2\pi i}{3}\Big]\sin\frac{2\pi n}{N}+2\Big[\sum_{i=0}^{2}x(n+\frac{iN}{3})\sin\frac{2\pi i}{3}\Big]\cos\frac{2\pi n}{N},$$

令
$$R_1(n)=\sum_{i=0}^{2}x(n+\frac{iN}{3})\cos\frac{2\pi i}{3},$$

即
$$R_1(n)=x(n)-\frac{1}{2}\Big[x(n+\frac{N}{3})+x(n+\frac{2N}{3})\Big]。$$

类似的令
$$S_1(n)=\sum_{i=0}^{2}x(n+\frac{iN}{3})\sin\frac{2\pi i}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Big[x(n+\frac{N}{3})-x(n+\frac{2N}{3})\Big]。$$

则
$$x_1(n)=2R_1(n)\cos\frac{2\pi n}{N}-2S_1(n)\sin\frac{2\pi n}{N},(n=0\sim\frac{N}{3}-1),$$
$$x'_1(n)=2R_1(n)\sin\frac{2\pi n}{N}+2S_1(n)\cos\frac{2\pi n}{N},$$
$$x_0(n)=\sum_{i=0}^{2}x(n+\frac{iN}{3})=x(n)+\Big[x(n+\frac{N}{3})+x(n+\frac{2N}{3})\Big]。$$

由此得到了长度 3^l 的 DHT 快速算法的算法结构及一些必要的计算公式。

2　运算复杂性分析

一个长度为 N 的 DHT 可以分解成 3 个 $\frac{N}{3}$ 长度的 DHT 及一些附加运算，递归使用这种分解，直到 3 点为止，从而就得到了长度 3^l 的 DHT 的最后结果。其中的运算量分析是对于固定的 n、$R_1(n)$ 和 $S_1(n)$ 的计算不需要乘法，只需要 3 个加法，而 $x_1(n)$ 和 $x'_1(n)$ 相当于计算两个复数相乘，根据复乘的最佳算法，只需 3 个实乘和 3 个实加。$x_0(n)$ 需要 1 个加法。因此对于 $n=0\sim\frac{N}{3}-1$ 可以得到运算量为 $3\times\frac{N}{3}=N$ 个乘法；$(3+3+1)\times\frac{N}{3}=\frac{7N}{3}$ 个加法。又 $C_0(k)$、$D_1(k)$ 和 $D'_1(\frac{N}{3}-k)$ 是长度为 $\frac{N}{3}$ 的 3 个 DHT，$C_1(k)$ 和 $C_2(k-1)$ 需要 $2\times\frac{N}{3}$ 个加法，若用 $M(N)$ 和 $A(N)$ 分别表示长度为 N 的 DHT 所需的总乘法和总加法，则有：

$$M(N)=3M(\frac{N}{3})+N;$$
$$A(N)=3A(\frac{N}{3})+\frac{7}{3}N+\frac{2}{3}N=3A(\frac{N}{3})+3N。$$

当 $N=3^l$ 时，最后总运算量为：

$$M(N)=(l-1)N+3^{l-1}M(3);$$

$$A(N)=3(l-1)N+3^{l-1}A(3)。$$

直接计算 3 点 DHT,有 $M(3)=2,A(3)=6$,故

$$M(N)=(l-\frac{1}{3})N;$$

$$A(N)=(3l-1)N。$$

上述算法计算长度为 3^l 的 DHT,比已知的基—3 算法的乘法和加法少得多,可与参考文献中[1]、[5]、[6]比较可知。

本文得到国防科技大学七系曾永弘教授的帮助,在此表示感谢。

参 考 文 献

[1] 曾泳泓,蒋增荣.任意长度 W 变换的统一算法及其实现[J].计算数学,1996,8(3):321-327

[2] 曾泳泓,蒋增荣,余品能.信息处理丛书:快速算法[M].北京:国防科大出版社.1994.

[3] Bracewell R N. Assessing the Hartley transform[J]. IEEE Trans ASSP 1990,38(12):2174-2176.

[4] 王中德.快速 W 变换—算法与程序[J].中国科学(A 辑),1988,38(5):549-560.

[5] 曾泳泓.任意长度离散 Hartiey 变换的快速算法[J].电子科学学刊,1993,3(2):121-127.

[6] 茅一民.长度为 P^l 的离散哈脱莱变换的快速算法[J].电子科学学刊,1990,(6):584-592

The Fast Algorithm for Discrete Hartley Transform of the Special Length

ZHANG Xiao-shui, ZHAO Quan-xi

(The Missile Institute,AFEU.,Sanyuan 713800,Chian)

Abstract:The fast algorithm for discrete Hartley transform of the special length 3^l is presented in this paper. It is a recursion algorithm of discrete Hartley transform in which the length 3^l is turned into the length 3^{l-1}. The structure is simpler and arithmetic operations are fewer than those of other known algorithms.

Key words:signal processing;fast algorithm;discrete Hartley transform