第1卷第3期　　空军工程大学学报(自然科学版)　　Vol. 1 No. 3
2000年8月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Aug. 2000

灰色二阶预测模型建模方法的改进

王端民，　张莲生
(空军工程大学 工程学院，陕西 西安　710038)

摘　要：灰色二阶预测模型，既能反映系统的趋势性变化特征，又能反映系统的周期性变化特征，因而具有很大的应用价值。然而建立模型的传统方法所采用的近似处理，使得模型精度低，极大地妨碍了该模型的应用。针对灰色预测模型建模方法的这些不足之处，提出并证明了建立灰色二阶预测模型的改进方法，并通过一个例子对该模型进行了验证。

关键词：灰色预测；建立模型；参数估计
中图分类号：N94　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-3516(2000)03-0023-04

灰色预测模型能够根据少量信息进行计算和推测，因而在人口、经济、生态、农业、医学、工程技术、气象、水文和减灾等许多部门得到广泛的应用[1]。然而传统的建模方法存在许多问题，如文献[2]证明灰色预测模型的累加生成方法使得越旧的数据在建模过程中权重越大，而且存在着使原来不具有指数规律的数据建成具有指数规律的模型的原理性误差。文献[3]指出传统建模方法得到的灰色预测模型随计算零点、序列长度、累加次数的不同而预测结果不同，文献[4]证明当参数a的绝对值较小时，传统建模方法产生较大的误差。针对这些问题，文献[5]提出了改进的GM(1,1)模型建模方法，精度较高，但GM(1,1)模型不能反映系统参数的周期性变化规律。灰色二阶预测模型，即GM(2,1)模型[6]，既能反映系统的趋势性变化特征，又能反映系统的周期性变化特征，因而具有很大的应用价值。然而建立GM(2,1)模型的传统方法[6]不仅计算量大，而且建模过程中获取导数信号不得已采取的插值近似处理，使得模型精度低[7]，不能很好地反映系统的变化特征，因而极大地妨碍了它的应用。本文针对这一问题，研究出一种建立GM(2,1模型的改进方法，既先建立系统的二阶差分方程模型，再导出GM(2,1)模型。该方法不仅计算量小，而且建模精度高。

1　建立GM(2,1)模型的改进方法

设原始数据列为：

$$t: t_1, t_2, \cdots\cdots, t_n$$

$$x(t): x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$$

$$\text{其中}\ t_{i+1} - t_1 = \Delta \quad \imath = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

则建立GM(2,1)模型的改进算法如下：

1.1　建立系统的二阶差分模型

$$x_k = \alpha x_{k-1} + \beta x_{k-2} + \gamma, k = 3, 4, \cdots\cdots, n$$

其中α,β,γ为待估的模型参数

$$\text{记}\ Y = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 & 1 \\ x_3 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

则根据最小二乘法估计参数α,β,γ有：$\theta = (X^\tau X)^{-1} X^\tau Y$

收稿日期：1999-12-17
作者简介：王端民(1965-)，男，陕西蓝田人，讲师，博士生，研究方向为管理系统分析.

于是有 $$x_k = \alpha x_{k-1} + \beta x_{k-2} + \gamma, k = 3,4,\cdots\cdots,n$$

1.2 再由二阶差分模型确定 GM(2,1)模型的形式

(1)若 $\alpha=2\beta=-1$ 则 $x(t)=c_1t^2+c_2t+c_3$

(2)若 $\alpha+\beta=1$ 且 $\beta\neq-1$ 则 $x(t)=c_1e^{rt}+c_2t+c_3$

(3)若 $\alpha^2+4\beta=0$ 且 $\beta\neq-1$ 则 $x(t)=(c_1+c_2)te^{rt}+c_3$

(4)若 $\alpha^2+4\beta>0$ 则 $x(t)=c_1e_{r_1t}+c_2e_{r_2t}+c_3$

(5)若 $\alpha^2+4\beta<0$ 则 $x(t)=e^{at}(c_1cosbt+c_2sinbt)+c_3$

(6)若 $\alpha^2+4\beta>0$ 且 $\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}<0$ 或 $\alpha^2+4\beta<0$ 且 $\alpha<0$,则非 GM(2,1)模型上述模型中的参数 c_1, c_2,c_3,r,r_1,r_2,a,b 均为待估的模型参数

1.3 估计模型参数

(1)对于模型 $x(t)=c_1t^2+c_2t+c_3$

$$记\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}t_1^2 & t_1 & 1\\t_2^2 & t_2 & 1\\\vdots & \vdots & \vdots\\t_n^2 & t_n & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

则根据最小二乘法估计参数 c_1,c_2,c_3 有 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{T}^{\tau}\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}^{\tau}\boldsymbol{X}$

(2)对于模型 $x(t)=c_1e^{rt}+c_2t+c_3$,$r=[\ln(\alpha-1)]/\Delta$ 或 $r=[\ln(-\beta)]/\Delta$

$$记\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}e^{rt_1} & t_1 & 1\\e^{rt_2} & t_2 & 1\\\vdots & \vdots & \vdots\\e^{rt_n} & t_n & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

则根据最小二乘法估计参数 c_1,c_2,c_3 有 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{T}^{\tau}\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}^{\tau}\boldsymbol{X}$

(3)对于模型 $x(t)=(c_1+c_2)te^{rt}+c_3$,$r=[\ln(\alpha/2)]/\Delta$ 或 $r=[\ln(-\beta)]/2\Delta$

$$记\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}e^{rt_1} & t_1e^{rt_1} & 1\\e^{rt_2} & t_2e^{rt_2} & 1\\\vdots & \vdots & \vdots\\e^{rt_n} & t_ne^{rt_n} & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

则根据最小乘法估计参数 c_1,c_2,c_3 有 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{T}^{\tau}\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}^{\tau}\boldsymbol{X}$

(4)对于模型 $x(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}+c_3$

$$记\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}e^{r_1t_1} & e^{r_2t_1} & 1\\e^{r_1t_2} & e^{r_2t_2} & 1\\\vdots & \vdots & \vdots\\e^{r_1t_n} & e^{r_2t_n} & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

则根据最小二乘法估计参数 c_1,c_2,c_3 有 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{T}^{\tau}\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}^{\tau}\boldsymbol{X}$

(5)对于模型 $x(t)=e^{at}(c_1\cos bt+c_2\sin bt)+c_3$,$a=[\ln(-\beta)]/2\Delta$,$b=\alpha/(2-\sqrt{-\beta})$

$$记\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}e^{at_1}\cos bt_1 & e^{at_1}\sin bt_1 & 1\\e^{at_2}\cos bt_2 & e^{at_2}\sin bt_2 & 1\\\vdots & \vdots & \vdots\\e^{at_n}\cos bt_n & e^{at_n}\sin bt_n & 1\end{bmatrix}$$

则根据最小二乘法估计参数 c_1,c_2,c_3 有 $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{T}^{\tau}\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}^{\tau}\boldsymbol{X}$

2 改进建模方法的证明

对改进方法的证明实质上就是要证明由二阶差分方程模型参数及原始数据列能唯一决定 GM(2,1)模型的形式及其参数。

2.1 GM(2,1)模型的函数形式

GM(2,1)模型系二阶常系数线性微分方程模型，其函数表达式有以下五种形式：

①$x(t)=c_1t^2+c_2t+c_3$

②$x(t)=c_1e^{rt}+c_2t+c_3$

③$x(t)=(c_1+c_2)te^{rt}+c_3$

④$x(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}+c_3$

⑤$x(t)=e^{rt}(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t)+c_3$

2.2 GM(2,1)模型函数形式及指数位置参数与差分模型参数的一一对应关系

(1)对于模型 $x(t)=c_1t^2+c_2t+c_3$

$$x(t+\Delta)=c_1(t+\Delta)^2+c_2(t+\Delta)+c_3=c_1t^2+(2c_1\Delta+c_2)t+c_1\Delta^2+c_2\Delta+c_3$$

$$x(t+2\Delta)=c_1(t+2\Delta)^2+c_2(t+2\Delta)+c_3=c_1t^2+(4c_1\Delta+c_2)t+4c_1\Delta^2+2c_2\Delta+c_3$$

令 $\alpha=2,\beta=-1,\gamma=2c_1\Delta^2+2c_2\Delta+c_3$，则 $x(t+2\Delta)=\alpha x(t+\Delta)+\beta x(t)+\gamma$

$\alpha=2,\beta=-1$ 即 1.2 节(1)的条件。

(2)对于模型 $x(t)=c_1e^{rt}+c_2t+c_3$

$$x(t+\Delta)=c_1e^{r\Delta}e^{rt}+c_2t+c_2\Delta+c_3$$

$$x(t+2\Delta)=c_1e^{2r\Delta}e^{rt}+c_2t+2c_2\Delta+c_3$$

令 $\alpha=e^{r\Delta}+1,\beta=-e^{r\Delta},\gamma=e^{r\Delta}c_2\Delta+c_3$，则 $x(t+2\Delta)=\alpha x(t+\Delta)+\beta x(t)+\gamma$

由 $\alpha=e^{e\Delta}+1,\beta=-e^{r\Delta}$ 可得 1.2 节(2)的条件，及 1.3 节(2)的参数关系。

(3)对于模型 $x(t)=(c_1+c_2)te^{rt}+c_3$

$$x(t+\Delta)=(c_1e^{r\Delta}+c_2\Delta e^{r\Delta})e^{rt}+c_2e^{r\Delta}te^{rt}+c_3$$

$$x(t+2\Delta)=(c_1e^{2r\Delta}+2c_2\Delta e^{2r\Delta})e^{rt}+c_2e^{2r\Delta}te^{rt}+c_3$$

令 $\alpha=2e^{r\Delta},\beta=-e^{2r\Delta},\gamma=c_3(2e^{r\Delta}-e^{2r\Delta})$，则 $x(t+2\Delta)=\alpha x(t+\Delta)+\beta x(t)+\gamma$

由 $\alpha=2e^{r\Delta},\beta=-e^{2r\Delta}$ 可得 1.2 节(3)的条件及 1.3 节(3)的参数关系。

(4)对于模型 $x(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}+c_3$

$$x(t+\Delta)=c_1e^{r_1\Delta}e^{r_1t}+c_2e^{r_2\Delta}e^{r_2t}+c_3$$

$$x(t+2\Delta)=c_1e^{2r_1\Delta}e^{r_1t}+c_2e^{2r_2\Delta}e^{r_2t}+c_3$$

令 $\alpha=e^{\Delta r_1}+e^{\Delta r_2},\beta=-e^{(r_1+r_2)\Delta},\gamma=c_3(e^{\Delta r_1}+e^{\Delta r_2}-e^{(r_1+r_2)\Delta})$，则

$$x(t+2\Delta)=\alpha x(t+\Delta)+\beta x(t)+\gamma$$

由 $\alpha=e^{\Delta r_1}+e^{\Delta r_2},\beta=-e^{(r_1+r_2)\Delta}$ 可得 1.2 节(4)的条件及 1.3 节(4)的参数关系

(5)对于模型 $x(t)=e^{at}(c_1\cos bt+c_2\sin bt)+c_3$

$$x(t+\Delta)=e^{a(t+\Delta)}[c_1\cos b(t+\Delta)c_2\sin b(t+\Delta)+c_3]$$

$$x(t+2\Delta)=e^{a(t+2\Delta)}[c_1\cos b(t+2\Delta)+c_2\sin b(t+2\Delta)+c_3]$$

令 $\alpha=2e^{a\Delta}\cos(b\Delta),\beta=-e^{2a\Delta},\gamma=c_3[2e^{a\Delta}\cos(b\Delta)-e^{2a\Delta}]$则

$$x(t+2\Delta)=\alpha x(t+\Delta)+\beta x(t)+\gamma$$

由 $\alpha=2e^{a\Delta}\cos(b\Delta),\beta=-e^{2a\Delta}$ 可得 1.2 节(5)的条件及 1.3 节(5)的参数关系

2.3 差分方程参数确定 GM(2,1)模型参数的唯一性

由 2.2 可知，差分方程的参数与 GM(2,1)相应的函数形式及指数位置参数是一一对应的，而其他参数是由原始数据列直接估计的，因此，通过差分方程可以唯一确定相应的 GM(2,1)模型参数。

3 改进方法与传统方法的建模比较分析

为了便于比较分析，我们用一个已知函数 $x(t)=e^{0.1t}+e^{0.2t}$ 产生一组数据，然后根据这组数据分别用传统的方法和改进的方法建立模型，比较两种方法得到的模型与该函数的接近程度。

t：	1，	2，	3，	4，	5
$x(t)$：	2.326 57，	2.713 23，	3.171 98，	3.717 37，	4.367 00

用传统方法进行建模得到，$x(t)=7.996\ 18e^{0.165\ 497t}+6.767\ 50e^{0.144\ 293t}$

用改进的方法建模得到 $x(t)=0.923\,479e^{0.084\,646\,4t}+1.136\,06e^{0.195\,308t}-0.059\,573\,6$

可以看到,用改进的方法建模得到的模型和产生原始数据序列的模型很接近,而用传统方法建模得到的模型则和产生原始数据序列的模型相去甚远。因此,改进的建模方法优于传统的建模方法。

参 考 文 献

[1] 邓聚龙. 灰色系统(社会、经济)[M]. 北京:国防工业出版社,1985.

[2] 张子旭. 灰色预测中 GM 模型的累加生成问题[J]. 西安石油学院学报,1997,12(5):52-54.

[3] 冯利华. 灰色预测模型的问题讨论[J]. 系统工程理论与实践,1997,17(12):125-128.

[4] 宋中民. 灰色 GM(2)模型[J]. 系统工程理论与实践,1999,19(10):127-129.

[5] 王端民,张莲生. 灰色模型间接建模法预测[J]. 预测,1996,15(7):159-161.

[6] 邓聚龙. 灰色预测与决策[M]. 武汉:华中理工大学出版社,1986.

[7] 王铮,和莹. 灰色系统建模方法的困难及其克服[J]. 系统工程理论与实践,1990,10(5):17-20.

Improvement on Building GM(2,1) Forecasting Models

WANG Duan-min, ZHANG Lian-sheng

(The Engineering Institute, AFEU., Xi'an 710038, China)

Abstract: The GM(2,1) models can reflect the rend and periodic changes of system in the meantime, so it is very useful. But the approximate calculation in traditional method of building models made the precision of GM(2,1) models very low, and greatly obstructed its using range. Aiming at these shortages, this paper presents and proved an improving method of building GM(2,1) models, and tests and verifies this method by an example.

Key words: grey forcasting; building models; parameters estimation