

# 使用窗谱估计法验证仿真系统模型

刘鹏, 陈长兴, 白云

(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

**摘要:** 使用窗谱估计法对仿真系统模型进行了验证, 讨论了验证的数学方法, 推导了验证所使用公式, 并进行了实例分析。这种方法可望用于工程实践。

**关键词:** 谱估计; 仿真; 模型验证

**中图分类号:** TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2000)02-0069-03

如何进行仿真系统可信度评估是仿真界一直在探索的问题之一, 也是一个世界性的难题。归根到底, 仿真是基于模型而非真实对象进行试验, 因此, 仿真结果不可能完全精确地代表真实对象, 存在一个可信性(credibility)问题, 也就是要对仿真模型进行有效性分析, 对仿真模型有效性的验证在整个仿真过程中占据十分重要的地位, 是不可缺少的环节。

## 1 仿真模型的验证

直观来看, 验证仿真模型有效性的最基本的方法就是考察在相同的输入条件下仿真模型输出与实际系统输出是否一致以及一致性的程度如何, 这种验模的办法有时也称为仿真实验与实物实验的相容性检验。实验数据通常以时间序列的形式表示, 这里, 只考虑等间隔采样的情形, 设采样间隔为  $\Delta t$ , 来自实际系统的输出序列为  $x(n\Delta t)$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ), 简记为  $\{X_n\}$ , 来自系统仿真模型的输出序列为  $y(n\Delta t)$ , 简记为  $\{Y_n\}$ , 其中  $N$  为观测序列长度。这样, 仿真模型的验证就成为时间序列的比较, 要比较这两个时间序列的差异, 可以在时域进行(相关分析, 误差分析), 也可以在频率域进行(谱分析)。由于时域法确认模型有效性的界限在理论上还没有一个统一标准, 只能在实践中根据经验判定, 对仿真模型的有效性不能给出统计判断, 因此, 在频率域中讨论数据的相容性更具有吸引力。鉴于谱分析理论都是针对各态历经的(广义)平稳时间序列, 我们下面的分析都设  $\{X_n\}$  和  $\{Y_n\}$  是(广义)平稳序列。

### 1.1 谱密度的估计

设  $\{X_n\}$  是(广义)平稳序列, 其自相关函数为  $R_x(m)$ , 其谱密度为  $S_x(\omega)$ , 由随机过程知识我们知道  $R_x(m)$  和  $S_x(\omega)$  为一付氏变换对。即

$$S_x(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x(m) e^{-j\omega m} \quad (1)$$

在计算  $S_x(\omega)$  时,  $R_x(m)$  的确定通常比较困难, 而且(1)式是无穷求和, 因此, 用(1)式求取  $S_x(\omega)$  是行不通的。但当  $\{X_n\}$  是(广义)平稳序列时, 可用样本自相关函数得到  $R_x(m)$  的估计值  $\hat{R}_x(m)$  为:

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} (X_n - \mu_x)(X_{n+m} - \mu_x) \quad 0 \leq m \leq N-1 \quad (2)$$

$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$  为  $\{X_n\}$  的均值。当  $m$  越大, 用(2)式估计自相关函数时用到的加项越少, 估计误差也就越大, 再用(1)式逼近出的谱密度误差就更大, 为此, 可考虑减少  $R_x(m)$  端部项对谱密度估计的影响。一种简便的办法就是对  $R_x(m)$  进行加窗截留, 这样, 谱密度的估计公式为:

$$\hat{S}_X(\omega) = \sum_{m=-M}^M W(m) \hat{R}_X(m) e^{-j\omega m} \quad (3)$$

$W(m)$ 为窗函数,选则合适的 $W(m)$ 可使谱估计的精度提高,有关窗函数的选取等问题见参考文献[2]。

## 1.2 谱的相容性检验

分析随机序列的频谱并不是我们的最终目的,我们是为了进行数据的相容性检验,从而得到模型有效性的统计分析结果。设 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 的谱密度真值分别为 $S_X(\omega)$ 和 $S_Y(\omega)$ ,而通过谱估计得到的其估计值分别为 $\hat{S}_X(\omega)$ 和 $\hat{S}_Y(\omega)$ ,现在的问题是如何根据估值来判断 $S_X(\omega)$ 和 $S_Y(\omega)$ 是否相等,即要检验如下假设:

$$H_0: S_X(\omega) = S_Y(\omega) \quad (4)$$

下面我们给出检验的统计方法。

设 $\hat{S}_X(\omega)$ 为随机时间序列 $\{X_n\}$ 的谱密度 $S_X(\omega)$ 的窗谱估计,则参考文献[2]已证明 $K \hat{S}_X(\omega)/S_X(\omega) \sim X_K^2$ ( $K=2N/M$ ), $N$ 为序列长度, $M$ 为数据窗宽度,即 $K \hat{S}_X(\omega)/S_X(\omega)$ 服从自由度为 $K$ 的 $X^2$ 分布,同理 $K \hat{S}_Y(\omega)/S_Y(\omega)$ 亦服从自由度为 $K$ 的 $X^2$ 分布,且它们是相互独立的,于是

$$G = \frac{\hat{S}_X(\omega)/S_X(\omega)}{\hat{S}_Y(\omega)/S_Y(\omega)} \sim F_{K,K} \quad (5)$$

即 $G$ 服从分子分母均为自由度 $K$ 的 $F$ 分布,于是,对于给定的显著性水平 $\alpha$ ,有

$$P \left\{ F_{1-\alpha/2,K,K} < \frac{\hat{S}_X(\omega)/S_X(\omega)}{\hat{S}_Y(\omega)/S_Y(\omega)} < F_{\alpha/2,K,K} \right\} = 1 - \alpha \quad (6)$$

$F_{p,K,K}$ 为分子分母均为自由度 $K$ 的 $F$ 分布的 $100p$ 百分位点,将上式做一变形,则为:

$$P \left\{ \frac{\hat{S}_Y(\omega)}{\hat{S}_X(\omega)} F_{1-\alpha/2,K,K} < \frac{S_Y(\omega)}{S_X(\omega)} < F_{\alpha/2,K,K} \frac{\hat{S}_Y(\omega)}{\hat{S}_X(\omega)} \right\} = 1 - \alpha \quad (7)$$

$$\text{令} \quad a = \frac{\hat{S}_Y(\omega)}{\hat{S}_X(\omega)} F_{1-\alpha/2,K,K} \quad b = \frac{\hat{S}_Y(\omega)}{\hat{S}_X(\omega)} F_{\alpha/2,K,K} \quad (8)$$

则(7)式变为:

$$p \{ a < S_Y(\omega)/S_X(\omega) < b \} = 1 - \alpha$$

若(4)式成立,则上式变为

$$p \{ a < 1 < b \} = 1 - \alpha \quad (9)$$

按上述关系式,对每个频率点 $\omega_i$ 都进行检验,如果在每个频率点 $\omega_i$ 都成立(9)式,则认为在显著性水平 $\alpha$ 下,两个时间序列样本是相容的,仿真系统模型可通过验证。

下面进行实际系统仿真模型的验证。来自飞行实验的数据和仿真模型输出的数据如图1所示,两组数据采样间隔都为0.02秒,观测时间区间取为25.6秒,即128个观测点。由图1可看出,两组数据近似满足广义平稳性要求,这样可以采用前面所述的验模步骤进行模型验证。选择哈密窗作为窗函数进行谱估计,使用关窗法确定出窗宽度为 $M \approx 46$ , $F$ 分布的自由度为 $K = \frac{2N}{M} \approx 6$ 。而 $T_s = 0.02$ 秒,故谱估计的主值区间应取为 $0 \sim 1/2T_s$  Hz,即 $[0 \sim 25]$  Hz,所考察的频率点为 $f_j = 25j/M$  ( $j=0,1,\dots,M$ ),在这些频率点上由(8)式计算出的 $a(\omega_j)$ 和 $b(\omega_j)$ 如表1所示,以 $f_j$ 为横坐标, $a(\omega_j)$

表1  $\alpha=0.05$ 的置信上、下限

频率 Hz	置信下限	置信上限
0.000000	0.189511	4.233521
0.54347	0.190988	4.266506
1.08695	0.199892	4.465429
1.63043	0.099513	2.223043
2.17391	0.169038	3.776166
2.71739	0.174645	3.901417
3.26087	0.177119	3.956691
3.80434	0.179638	4.012957
4.34782	0.184254	4.116084
4.89130	0.192859	4.308317
5.43478	0.202649	4.527017
5.97826	0.211519	4.725161
6.52173	0.251602	5.620582
7.06521	0.120414	2.689944
7.60869	0.153311	3.424850
8.15217	0.148357	3.314173
8.69565	0.134665	3.008304
9.23913	0.131853	2.945482
9.78260	0.142122	3.174891
10.3260	0.152227	3.400620
10.8695	0.159701	3.567584
11.4130	0.166883	3.728022
11.9565	0.177176	3.957961
12.5000	0.191629	4.280834
13.0434	0.202073	4.514149
13.5869	0.202629	4.526564
14.1304	0.197767	4.417952
14.6739	0.189747	4.238799
15.2173	0.175260	3.915156
15.7608	0.150721	3.366987
16.3043	0.134942	3.014484
16.8478	0.138840	3.101569
17.3913	0.143927	3.215219
17.9347	0.142825	3.190594
18.4782	0.132983	2.970733
19.0217	0.114660	2.561420
19.5652	0.109499	2.446114
20.1086	0.125244	2.797855
20.6521	0.136600	3.051530
21.1956	0.139852	3.124175
21.7391	0.138729	3.099092
22.2826	0.137464	3.070831
22.8260	0.141350	3.157639
22.3695	0.153747	3.434586
23.9130	0.171932	3.840823
24.4565	0.190096	4.246586
25.0000	0.202999	4.534824

和  $b(\omega_j)$  为纵坐标所作的置信带曲线如图 2 所示, 由于在所考察的频带内置信上限和下限都包含“1”, 所以仿真模型输出与实际系统输出在统计意义下是一致的, 仿真模型通过验证。

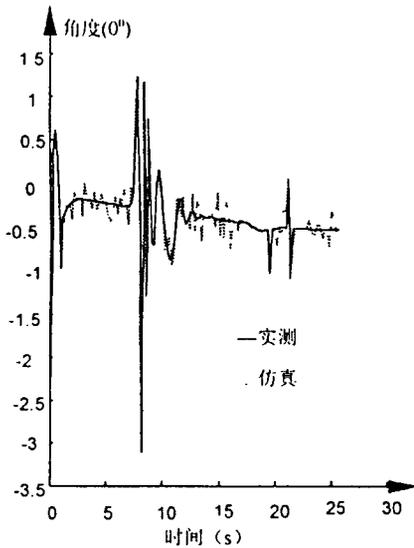


图 1 实测和仿真数据曲线

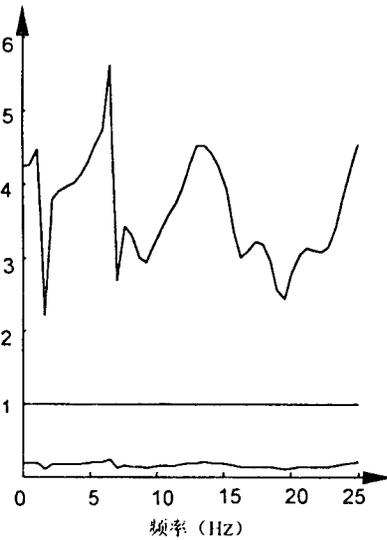


图 2  $\alpha=0.05$  时的联合置信曲线

## 2 结束语

本文比较成功的把窗谱估计法运用于仿真模型的验证, 通过实例分析说明了这种方法的工程实用价值。但由表 1 可看到, 这种谱估计的置信区间较宽, 下一步所要做的工作就是如何使用其它谱估计法去降低置信区间的宽度。

### 参 考 文 献

- [1] Montgomery D. C., Conard R. G. Comparison of simulation and flight-test data for missile systems[J]. SIMULATION, 1980, 34(2): 63~72.
- [2] 陈兆国. 时间序列及其谱分析[M]. 北京: 科学出版社, 1988, 253~282.

## Verifying Simulation Model Using Window Spectrum Estimation

LIU Peng, CHEN Chang-xing, BAI Yun  
(The Missile Institute, AFEU., Sanyuan 713800, China)

**Abstract:** In this article, we use the method of spectrum estimation to verify simulation model. The mathematical method of verifying simulation model is discussed and the formula of verifying simulation model is deduced. We also use this method to verify a actual simulation system. We hope this method will be used to actual engineering.

**Key words:** spectrum estimation; simulation; model verifying