

正交铺设复合材料矩形悬臂板弯曲解析研究

张承宗¹, 杨光松²

(1. 空军第一研究所, 北京 100076; 2. 二炮第一研究所, 北京 100076)

摘要: 应用各向异性板结构横向弯曲一般解析解, 对承受均布载荷的正交铺设纤维增强复合材料矩形悬臂板进行弯曲分析。讨论了各向异性对板挠度的影响。分别选取强各向异性材料、弱各向异性材料进行计算分析, 结果表明纤维方向垂直于悬臂板固定边的层合悬臂板刚度挠度最小。

关键词: 纤维增强复合材料; 正交铺设; 悬臂板; 弯曲

中图分类号: TB330.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2000)02-0015-03

纤维增强复合材料层合板广泛地应用于航空航天工程。板弯曲分析是层合板设计的重要内容。由于其制造及设计相对简单, 正交铺设层合板是工程中常用的设计形式。悬臂板力学边界条件较为复杂, 数学求解较为困难, 然而悬臂板在工程中应用甚广, 故悬臂板力学分析一直是力学界关注的内容之一^[1]。近年发展了复合材料板结构的解析求解方法^[2], 使得纤维增强复合材料矩形悬臂板弯曲解析计算变得相对容易。本文应用文献^[2]给出的解析解针对承受均布载荷纤维增强正交铺设复合材料矩形悬臂板进行解析计算, 讨论有关设计参数对层合板性能的影响。

1 理论部分

考虑正交铺设纤维增强复合材料矩形悬臂板, 板长为 a , 板宽为 b , 厚度为 h 。板面承受均布载荷 q 。正交铺设纤维增强复合材料板横向弯曲控制方程^[3]为

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (1)$$

本文引入如下无量纲量: $\xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{b}; \alpha = \frac{a}{b}; w(x, y) = \frac{(x, y)}{h}; P = \frac{qa^4}{h}$ 。

由式(1)可转化为:
$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D_{22} \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = P \quad (2)$$

横向弯曲问题求解可归结为求解偏微方程(2)边界条件及角点条件下的边值问题, 按照文献^[2]的求解步骤, 可得正交铺设纤维增强复合材料矩形板横向弯曲问题一般解析解:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_{1m} \frac{\text{sh}m\pi b_1 \eta \sin m\pi (a_1(1-\eta) + 1 - \xi)}{\text{sh}m\pi b_1} + A_{2m} \frac{\text{sh}m\pi b_1 (1-\eta) \sin m\pi (a_1\eta + \xi)}{\text{sh}m\pi b_1} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_{3m} \frac{\text{sh}m\pi b_2 \eta \sin m\pi (a_2(1-\eta) + 1 - \xi)}{\text{sh}m\pi b_2} + A_{4m} \frac{\text{sh}m\pi b_2 (1-\eta) \sin m\pi (a_2\eta + \xi)}{\text{sh}m\pi b_2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_{1n} \frac{\text{sh}n\pi d_1 \xi \sin n\pi (c_1(1-\xi) + 1 - \eta)}{\text{sh}n\pi d_1} + B_{2n} \frac{\text{sh}n\pi d_1 (1-\xi) \sin n\pi (c_1\xi + \eta)}{\text{sh}n\pi d_1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_{3n} \frac{\text{sh}n\pi d_2 \xi \sin n\pi (c_2(1-\xi) + 1 - \eta)}{\text{sh}n\pi d_2} + B_{4n} \frac{\text{sh}n\pi d_2 (1-\xi) \sin n\pi (c_2\xi + \eta)}{\text{sh}n\pi d_2} \right) + W_1 + W_0 \quad (3)$$

其中 W_1 为补充解。

$$W_1 = t_1\eta(\xi - \xi^3) + t_2(1 - \eta)(\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) + t_3\eta(\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) + t_4(1 - \eta)(\xi - \xi^3) + t_5\xi(\eta - \eta^3) + t_6(1 - \xi)(\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta) + t_7\xi(\eta^3 - 3\eta^2 + 2\eta) + t_8(1 - \xi)(\eta - \eta^3) + t_9(1 - \xi)(1 - \eta) + t_{10}\eta(1 - \xi) + t_{11}\xi(1 - \eta) + t_{12}\xi\eta$$

其中 $A_{km}B_{km} (k=1, 4)$ $t_i (i=1, 12)$ 为待定系数, W_0 为式(2)的特解, 对于均匀载荷 P , $W_0 = \frac{P}{50}$

$$\left(\frac{\xi^2(1-\xi)^2}{D_{11}} + \frac{\eta^2(1-\eta)^2}{D_{22}\alpha^4} + \frac{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}{4(D_{12}+2D_{66})\alpha^2} \right), m, n \text{ 为正整数。}$$

$a_1 \pm b_1 i, a_2 \pm b_2 i$ (i 为虚数单位) 为特征方程 $D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\gamma^2 + D_{22}\gamma^4\alpha^4 = 0$ 的特征根 $\gamma_{1,2}, \gamma_{3,4}$;

$c_1 \pm d_1 i, c_2 \pm d_2 i$ (i 为虚数单位) 为特征方程 $D_{11}s^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\gamma^2 + D_{22}\alpha^4 = 0$ 的特征根 $s_{1,2}, s_{3,4}$ 。

本文所选边界条件如下: $\xi = 0, W = 0, \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0; \xi = 1, M_\xi = 0, Q_\xi = 0;$

$$\eta = 0, Q_\eta = 0, M_\eta = 0; \eta = 1, Q_\eta = 0, M_\eta = 0。$$

角点条件: $W(0,0) = 0, W(0,1)\eta = 0, \frac{\partial W}{\partial \xi}(0,0) = 0, \frac{\partial W}{\partial \xi}(0,1) = 0;$

$$M_\eta(0,0) = 0, M_\eta(0,1) = 0, M_\eta(1,1) = 0, M_\eta(1,0) = 0;$$

$$M_\xi(1,0) = 0, M_\xi(1,1) = 0, M_{\xi\eta}(1,1) = 0, M_{\xi\eta}(1,0) = 0。$$

实际计算中, 设 $m=n, m$ 最大取 M , 解析解(3)共有 $8M+12$ 个未知数。对于矩形悬臂板弯曲问题, 共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中, 形成 8 个方程, 将所得每个方程展成 M 项正弦级数, 根据正弦级数的正交性, 可以得到 $8M$ 个线性代数方程; 在四个角点 $(0,0](1,0](1,1)(0,1)$, 根据该处挠度、转角或弯矩平衡条件可有 12 个角点条件, 又可建立 12 个线性方程, 这样总共建立 $8M+12$ 个线性方程, 可以求解 $8M+12$ 个未知数, 文中所涉及的均布载荷作用下正交铺设纤维增强复合材料矩形悬臂板横向弯曲问题得解。

2 数值部分

本文采用上述方法进行数值计算。

选择玻璃环氧树脂(Glass/epoxy, 弱各向异性材料)、石墨环氧树脂(Graphite/epoxy, 强各向异性材料)进行分析。其材料参数见表 1。

表 1 材料参数

复合材料	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	γ_{12}
Glass/epoxy	38.60	8.27	4.14	0.26
Graphite/epoxy	181.00	10.30	7.17	0.28

取 $a=1m, b=1m, h=0.01m, q=10000N/m^2$, 计算中取 $M=20, \theta=0^\circ$, 本文给出以下三表分别考察 1 层矩形层合悬臂板挠度 w 总体分布及挠度边界的满足情况。在表 2~4 中, G1/ep、Gr/ep 分别代表 Glass/epoxy、Graphite/epoxy。

表 2 单层 0° 矩形层合悬臂板挠度 w 分布

x/a	$y/b = 0.0$		$y/b = 0.2$		$y/b = 0.5$		$y/b = 0.8$		$y/b = 1.0$	
	G1/ep	Gr/ep	G1/ep	Gr/ep	G1/ep	Gr/ep	G1/ep	Gr/ep	G1/ep	Gr/ep
0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.2	0.24454	0.00541	0.02661	0.00573	0.02680	0.00575	0.02661	0.00573	0.02445	0.00541
0.5	0.13040	0.02819	0.13400	0.02889	0.13520	0.02912	0.13400	0.02889	0.13040	0.02819
0.8	0.27350	0.05877	0.27710	0.05973	0.27920	0.06026	0.27710	0.05973	0.27350	0.05877
1.0	0.37360	0.08012	0.37750	0.08133	0.38000	0.08206	0.37750	0.08133	0.37360	0.08012

表 3 单层 90° 矩形层合悬臂板挠度 w 分布

x/a	$y/b = 0.0$		$y/b = 0.2$		$y/b = 0.5$		$y/b = 0.8$		$y/b = 1.0$	
	G1/ep	Gr/ep	G1/ep	Gr/ep	G1/ep	Gr/ep	G1/ep	Gr/ep	G1/ep	Gr/ep
0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.2	0.11710	0.09688	0.12410	0.09946	0.12620	0.10050	0.12410	0.09946	0.11710	0.09688
0.5	0.62120	0.50160	0.62810	0.50350	0.63180	0.50460	0.62810	0.50350	0.62120	0.50160
0.8	1.29900	1.04100	1.30200	1.04200	1.30400	1.04200	1.30200	1.04200	1.29900	1.04100
1.0	1.77100	1.41800	1.77400	1.41900	1.77600	1.41900	1.77400	1.41900	1.77100	1.41800

表 4 [0°/90°/0°]三层矩形层合悬臂板挠度 w 分布

x/a	y/b = 0.0		y/b = 0.2		y/b = 0.5		y/b = 0.8		y/b = 1.0	
	G1/ep	Gr/ep	G1/ep	Gr/ep	G1/ep	Gr/ep	G1/ep	Gr/ep	G1/ep	Gr/ep
0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.2	0.02523	0.00568	0.02735	0.00594	0.02755	0.00596	0.02735	0.00594	0.02523	0.00568
0.5	0.13420	0.02947	0.13770	0.03000	0.13900	0.03018	0.13770	0.03000	0.13420	0.02947
0.8	0.28130	0.06137	0.28480	0.06205	0.28690	0.06246	0.28480	0.06205	0.28130	0.06137
1.0	0.38400	0.08365	0.38790	0.08451	0.39040	0.08506	0.38790	0.08451	0.38400	0.08365

验证计算选取 1 层玻璃环氧方形层合悬臂板 ($a = 1m, b = 1m, h = 0.01m$), $q = 10000N/m^2$, 解数值稳定性验证计算结果见表 5。

表 5 一层石墨环氧矩形悬臂板板角(1.0,0.0)挠度

边界条件	M=10	M=20	M=30	M=40	M=50	M=60
CFFF	0.3745	0.3740	0.3737	0.3736	0.3735	0.3735

从表 2~4 可看出,本文解可较好地满足边界条件,具有良好的收敛性,表 5 显示:当 M 增大时,解数值保持稳定;计算中发现,对于实际情况,所需计算项数需经具体计算确定。对于本文涉及的材料、载荷、边界约束情况,M 取 30 可以基本满足挠度计算精度要求。从表 2~4 亦可发现,对于具有 CFFF 边界的正交异性板承受均布载荷时其最大挠度出现在悬臂板与固定边平行的悬空边中心(1.0,0.5)。

3 结论

(1)铺设角 θ 对复合材料悬臂板刚度有重大影响:悬臂板刚度在铺设角 θ 为 0° 时最大,在铺设角 θ 为 90° 时降为最低,而且铺设角 θ 为 90° 的悬臂板最大挠度至少是铺设角 θ 为 0° 的悬臂板最大挠度的数倍。 0° 铺层有助于提高悬臂板结构的刚度, 90° 铺层降低了悬臂板结构的刚度。

(2)各向异性加剧了层合板刚度的可设计性。强各向异性材料制成的层合板,板刚性受铺设角 θ 的影响更为显著,这表现在表 2~4 中,石墨环氧悬臂板在 90° 铺设时的最大挠度与其 0° 铺设时最大挠度之比要远大于玻璃环氧悬臂板的相应比值。

参 考 文 献

[1] 黄 炎. 弹性薄板理论[M]. 长沙:国防科技大学出版社,1992.
 [2] 张承宗,杨光松. 各向异性板结构横向弯曲一般解析解[J]. 力学学报,1996,28(4):429~440.
 [3] 张志民. 复合材料结构力学[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,1993.

Analytical Studies on the Bending of Fiber-Reinforced Cross-Ply Laminated Composite Rectangular Cantilever Plate

ZHANG Cheng-zong¹, YANG Guang-song²

(1. P. O. Box 9203, Beijing 10076, China; 2. Qing He Buidling, Zi 7, Beijing 10076, China)

Abstract. The general analytic solutions for the transverse bending of the anisotropic rectangular plate structure is applied to study the bending of fiber-reinforced cross-ply laminated rectangular cantilever plate with uniformed load. Analytical computation is carried out under heavily anisotropy material and slightly material. The computation results show the cantilever plates which fiber is perpendicular to the clamped boundary has the minimum deflection. The effect of anisotropy on the deflections of the plate is discussed.

Key words: fiber-reinforced composite; cross-ply; rectangular cantilever plate; bending