空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)
JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE EDITION)
第1卷第1期 Vol. 1 No. 1
2000年4月 Apr. 2000

关于二分图的正交因子分解

马润年[1]， 白国强[2]
[1](空军工程大学 电讯工程学院通信指挥系，陕西 西安 710077)
[2](陕西财经学院，陕西 西安 710061)

摘 要：设 G 是二分图，f_i,g_i 是定义在图 G 的顶点集 $V(G)$ 上的非负整数函数且 $g_i(x)\leqslant f_i(x)$，$\forall\ x\in V(G)$，$1\leqslant i\leqslant m$。若二分图 G 的边能划分成 m 个边不交的 $[g_1,f_1]$－因子 $F_1,\cdots[g_m,f_m]$－因子 F_m，则称 $\overline{F}=\{F_1,\cdots F_m\}$ 是二分图 G 的一个 $[g_i,f_i]_1^m$－因子分解，又若 H 是二分图 G 的一个有 m 条边的子图，若对任意的 $1\leqslant i\leqslant m$ 有 $|E(H)\cap E(F_i)|=1$，则称 $\overline{F}$ 与 H 是正交的。主要研究二分图的正交 $[g_i,f_i]_1^m$－因子分解并给出一个结果。

关键词：图；因子；因子分解；正交因子分解

分类号：O157.5 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-3516(2000)01-0083-03

1 基本概念

本文仅考虑有限无向简单图。设 G 是一个图，分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示顶点集和边集，用 $d_G(x)$ 表示顶点 x 在 G 中的次数。设 g 和 f 是定义在 $V(G)$ 上的两个整值函数且 $\forall\ x\in V(G)$ 有 $g(x)\leqslant f(x)$，记为 $g\leqslant f$。G 的一个 (g,f)－因子是指 G 有一个支撑子图 F 满足 $\forall\ x\in V(G)$ 有 $g(x)\leqslant d_F(x)\leqslant f(x)$。特别地，若 G 本身是一个 (g,f)－因子，则称 G 是一个 (g,f)－图，若 G 还是二分图，则称 G 是 (g,f)－二分图。若 $\forall\ x\in V(G)$ 有 $g(x)=a,f(x)=b$，则称 G 的 (g,f)－因子为 $[a,b]$－因子，(g,f)－图为 $[a,b]$－图，(g,f)－二分图为 $[a,b]$－二分图。设 f_i,g_i 是定义在图 G 的顶点集 $V(G)$ 上的非负整数函数且 $g_i(x)\leqslant f_i(x)$，$\forall\ x\in V(G)$，$1\leqslant i\leqslant m$，若图 G 的边能划分成为 m 个边不交的 $[g_1,f_1]$－因子 $F_1,\cdots[g_m,f_m]$－因子 F_m，则称 $\overline{F}=\{F_1,\cdots F_m\}$ 是 G 的 $[g_i,f_i]_1^m$－因子分解。特别地，若 $\forall\ x\in V(G)$ 有 $g_i(x)=0,f_i(x)=k_i>0$ 且 k_i 是整数 $1\leqslant i\leqslant m$，则图的 $[g_i,f_i]_1^m$－因子分解即为 $[0,k_i]_1^m$－因子分解。图 G 的一个 m－星是指 G 中一个有 m 条边 $m+1$ 个顶点的子图，使其中一个顶点的次数为 m，其余顶点的次数为 1，一个 m－星中次数为 m 的顶点称为它的中心。设 H 和 $\overline{F}$ 分别是 G 的一个 m－星和一个 $[0,k_i]_1^m$－因子分解，若对任意的 $i(1\leqslant i\leqslant m)$ 有 $|E(H)\cap E(F_i)|=1$，则称 $\overline{F}$ 与 H 正交，即图 G 有一个与 m－星正交的 $[0,k_i]_1^m$－因子分解。

设二分图 $G=(X,Y;E(G)$。$\forall\ S\subseteq X,\forall\ T\subseteq Y$，用 $e_G(S,T)$ 表示 G 的一个端点在 S 中另一个端点在 T 中的边的数目。记 $F(S)=\sum\limits_{x\in S}f(x)$，$d_G(S)=\sum\limits_{x\in S}d_G(x)$，且 $f(\Phi)=d_G(\Phi)=0$，其余概念和记号见文[1,2]。

2 主要结果

引理[2]1 设二分图 $G=(X,Y;E(G))$，g 和 f 是定义在 $V(G)$ 上的整值函数且 $g\leqslant f$，则图 G 有 (g,f)－因子的充分与必要条件是 $\forall\ S\subseteq X,\forall\ T\subseteq Y$ 有

(1) $f(S)+e_G(X\setminus S,T)-g(T)\geqslant 0$ (2) $f(T)+e_G(S,Y\setminus T)-g(S)\geqslant 0$

利用引理 1 和文[3]中类似的方法易证二分图 G 有 (g,f)－因子含一指定边的一个充要条件，证略。

收稿日期：1999-12-17
作者简介：马润年(1963-)，男，副教授(博士研究生).

引理 2　设 G,g,f 同引理 1，则 G 有 (g,f)－因子含边 $e=xy(x\in X,y\in Y)$ 的充要条件是 $\forall S\subseteq X,\forall T\subseteq Y$ 有(1)和(2)成立，且

(3)当 $x\in S,y\in Y\backslash T$ 时，$f(S)+e_G(X\backslash S,T)-g(T)\geqslant 1$

(4)当 $x\in X\backslash S,y\in T$ 时，$f(T)+e_G(S,Y\backslash T)-g(S)\geqslant 1$

定理　设 $k_1,k_2,\cdots k_m$ 是正整数。若 G 是 $[0,k_1+k_2+\cdots+k_m]$－二分图，H 是二分图 G 的一个 m－星，则二分图 G 有一个 $[0,k_i]_1^m$－因子分解与 H 正交。

证明　显然当 $m=1$ 时结论是成立的。假设 $m-1$ 时结论成立，要证 m 时结论亦成立 $(m\geqslant 2)$。

由于 H 是 $[0,k_1+k_2+\cdots+k_m]$－二分图 $G=(X,Y;E(G))$ 的 m－星，无妨设 $V(H)=\{x_0,y_1,\cdots y_m\}$，$E(H)=\{e_1,\cdots e_m\}$，其中 $x_0\in X$ 是 H 的中心，$e_i=x_0y_i(1\leqslant i\leqslant m)$。令 $G'=G-\{e_2,\cdots e_m\}$，$H'=H-\{e_1\}$ 是一个 $(m-1)$－星(把 $H-e_1$ 中的孤立顶点 y_1 去掉)。现定义 $V(G')=V(G)$ 上的两个整数值函数 g 和 f：

$$g(x)=max\{0,d_G(x)-(k_2+\cdots+k_m)\},\quad f(x)=k_1\quad \forall x\in V(G')$$

下面利用引理 2 证明 G' 有 (g,f)－因子含边 e_1。

首先，证明引理 2 中的条件(1)和(3)满足。

$\forall S\subseteq X,\forall T\subseteq Y$，考虑

$$f(S)+e_G(X\backslash S,T)-g(T)=k_1|S|+e_G(X\backslash S,T)-d_G(T_1)+(k_2+\cdots+k_m)|T_1|$$

其中 $T_1=\{t:t\in T,d_G(t)-(k_2+\cdots+k_m)>0\}$，$T_2=T\backslash T_1$。显然当 $t\in T_2$ 时，$g(t)=0$，即 $g(T_2)=0$。

情形 1　若 $|S|>|T_1|$，则

$$\begin{aligned}f(S)+e_{G'}(X\backslash S,T)-g(T)&=k_1|S|-d_G(T_1)+(k_2+\cdots+k_m)|T_1|+e_{G'}(X\backslash S,T)\\&>k_1|T_1|-d_G(T_1)+(k_2+\cdots+k_m)|T_1|+e_{G'}(X\backslash S,T)\\&=(k_1+k_2+\cdots+k_m)|T_1|-d_G(T_1)+e_{G'}(X\backslash S,T)\geq e_{G'}(X\backslash S,T)\geq 0\end{aligned}$$

利用严格不等号和两端的整数性知 $f(S)+e_{G'}(X\backslash S,T)-g(T)\geq 1$

情形 2　若 $|S|=|T_1|$，则

$$f(S)+e_{G'}(X\backslash S,T)-g(T)=(k_1+k_2+\cdots+k_m)|T_1|-d_G(T_1)+e_{G'}(X\backslash S,T)\geq e_{G'}(X\backslash S,T)\geq 0$$

又当 $x_0\in S,y_1\in Y\backslash T$ 时，显然 $e_{G'}(X\backslash S,T)=e_G(X\backslash S,T)$，所以

$$\begin{aligned}f(S)+e_{G'}(X\backslash S,T)-g(T)&=(k_1+k_2+\cdots+k_m)|S|+e_G(X\backslash S,T)-d_G(T_1)\\&\geq d_G(S)+e_G(X\backslash S,T)-d_G(T)\\&=e_G(S,T)+e_G(S,Y\backslash T)+e_G(X\backslash S,T)-d_G(T_1)\\&=d_G(T)+e_G(S,Y\backslash T)-d_G(T_1)\geq e_G(S,Y\backslash T)\geq|\{e_1\}|=1\end{aligned}$$

情形 3　若 $|S|<|T_1|$，则

$$\begin{aligned}f(S)+e_{G'}(X\backslash S,T)-g(T)&=(k_1+\cdots+k_m)|S|+(k_2+\cdots+k_m)(|T_1|-|S|)+e_{G'}(X\backslash S,T)-\\&\quad d_G(T_1)\geq(k_1+\cdots+k_m)|S|+(k_2+\cdots+k_m)+e_{G'}(X\backslash S,T)-\\&\quad d_G(T_1)\geq d_G(S)+(m-1)+e_G(X\backslash S,T)-(m-1)-d_G(T_1)\\&=e_G(S,T)+e_G(S,Y\backslash T)+e_G(X\backslash S,T)-d_G(T_1)\\&=d_G(T)+e_G(S,Y\backslash T)-d_G(T_1)\geq e_G(S,Y\backslash T)\geq 0\end{aligned}$$

又当 $x_0\in S,y_1\in Y\backslash T$ 时，有 $e_G(S,Y\backslash T)\geq 0$，故 $f(S)+e_{G'}(X\backslash S,T)-g(T)\geq 1$

综合上述知引理 2 中的条件(1)和(3)满足。

其次，证明引理 2 中的条件(2)和(4)满足。

$\forall S\subseteq X,\forall T\subseteq Y$，考虑

$$f(T)+e_{G'}(S,Y\backslash T)-g(S)=k_1|T|+e_{G'}(S,Y\backslash T)-d_G(S_1)+(k_2+\cdots+k_m)|S_1|$$

其中 $S_1=\{x:x\in S,d_G(x)-(k_2+\cdots+k_m)>0\}$。

若 $|T|>|S_1|$，则引理 2 中的条件(2)和(4)满足，其证明类似于情形 1。

若 $|T|=|S_1|$，则

$$f(T)+e_{G'}(S,Y\backslash T)-g(S)=(k_1+k_2+\cdots+k_m)|S_1|-d_G(S_1)+e_{G'}(S,Y\backslash T)\geqslant e_{G'}(S,Y\backslash T)\geqslant 0$$

又当 $x_0\in X\backslash S,y_1\in T$ 时，有 $e_{G'}(S,Y\backslash T)=e_G(S,Y\backslash T)$，类似于情形 2 有

$$\begin{aligned}f(T)+e_{G'}(S,Y\backslash T)-g(S)&=(k_1+k_2+\cdots+k_m)|T|+e_G(S,Y\backslash T)-d_G(S_1)\\&\geqslant e_G(X\backslash S,T)\geqslant|\{e_1\}|=1\end{aligned}$$

若$|T|<|S_1|$，则引理2中的条件(2)和(4)满足，其证明类似情形3。

所以引理2中的条件(2)和(4)满足。

综合上述知引理2的条件全部满足。由引理2知G'有(g,f)－因子F_1含边$e_1=x_0y_1$，而F_1还是特殊的$[0,k_1]$－因子，所以G有$[0,k_1]$－因子F_1含有边e_1，但不含边$e_2,\cdots e_m$。

现令$\bar{G}=G-E(F_1)$，则$\forall\ x\in V(G)=V(\bar{G})$有

$$0\leqslant d_{\bar{G}}(x)=d_G(x)-d_{F_1}(x)\leqslant d_G(x)-g(x)\leqslant d_G(x)-d_G(x)+k_2+\cdots+k_m=k_2+\cdots+k_m$$

即$\bar{G}$是一个$[0,k_2+\cdots+k_m]$－二分图，又H'是$\bar{G}$的一个$(m-1)$－星，由归纳法假设知$\bar{G}$有一个$[0,k_i]_2^m$－因子分解与H'正交。因此图G有一个$[0,k_i]_1^m$－因子分解与H正交。

3　结束语

文[4]研究了与星正交的(g,f)－因子分解，并提出两个问题，文[5]对其中的一个给出了圆满的解决。对于一般的正交$[g_i,f_i]_1^m$－因子分解问题研究起来比较困难，文[6]研究了一种特殊形式的正交$[g_i,f_i]_1^m$－因子分解，即正交$[0,k_i]_1^m$－因子分解，本文主要研究二分图的正交$[0,k_i]_1^m$－因子分解。文[7]证明了$[mg,mf]$－二分图有一个(g,f)－因子分解与它的m－星正交，但易举例说明$[h_1+\cdots+h_m,k_1+\cdots+k_m]$－二分图没有$[h_i,k_i]_1^m$－因子分解，其中$h_i\leqslant k_i(1\leqslant i\leqslant m)$，更谈不上正交因子分解，因此从这种意义上说，本文得到的结果是最好的。如果把文中的m－星改成m－对集，也容易举例说明其结论是不成立的。

参 考 文 献

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph Theory with Applications[M]. New York: Macmillan, 1976.

[2] J. Akiyama and M. Kano. Factors and factorizations of graphs—a survey[J]. Journal of Graph Theory 1985, 9(1): 1～42.

[3] 陈赐平. 具有给定性质的(g,f)－因子[J]. 系统科学与数学. 1988, 8(3): 367～376.

[4] 刘桂真. 与星正交的(g,f)－因子分解[J]. 中国科学(A辑). 1995, 25(4): 367～373.

[5] 李国君，刘桂真. 与任意图正交的(g,f)－因子分解[J]. 中国科学(A)辑. 1997, 27(12): 1083～1088.

[6] MA Run-nian, BAI Guo-qiang. On Orthogonal $[0,k_i]_1^m$—factorizations of graphs[J]. Acta Mathematica Scientia. 1998, 18(4): 461～465.

[7] 马润年，高安喜. 二分图的与星正交的(g,f)－因子分解[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版). 1998, 26(1): 25～28.

[8] 马润年. 与树正交的$[0,k_i]_1^m$－因子分解[J]. 西安电子科技大学学报. 1996, 23(图论专辑): 66～69.

[9] 高安喜，马润年. 图的正交因子分解[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版). 1999, 27(2): 20～22.

[10] MA Run-nian, XU Jin. Orthogonal $[0,k_i]_1^m$—factorizations of graphs[J]. 工程数学学报. 1999, 16(4): 23～26.

On Orthogonal Factorizations of Bipartite Graphs

MA Run-nian[1], BAI Guo-qiang[2]

[1](Dept. of Communication Command of the Telecommunication Engineering Institute, AFEU., Xi'an 710077, China)

[2](Shaanxi Finance and Economics Institute, Xian 710061, China)

Abstract: Let G be a bipartite graph and f_i, g_i be nonnegative integer-valued functions defined on the vertices set V(G) of G and $g_i(x)\leqslant f_i(x)$ for all $x\in V(G)$ $1\leqslant i\leqslant m$. If the edges of bipartite graph G can be decomposed into m edge disjoint $[g_1,f_1]$-factor $F_1,\cdots,[g_m,f_m]$-factor F_m, then $\bar{F}=\{F_1,\cdots,F_m\}$ is called a $[g_i,f_i]_1^m$-factorization of bipartite graph G, in addition, if H is a subgraph with m edges in bipartite graph G and $|E(H)\cap E(F_i)|=1$ for all $1\leqslant i\leqslant m$, then we call that $\bar{F}$ is orthogonal to H. This paper mainly studies orthogonal factorization of bipartite graph and gives one result.

Key words: Graph; Factor; Factorization; Orthogonal factorization