空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)
第1卷第1期 JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY Vol. 1 No. 1
2000年4月 (NATURAL SCIENCE EDITION) Apr. 2000

球直坐标转换误差分析及对卡尔曼滤波的制约

魏麦成
(空军工程大学 导弹学院导弹工程系,陕西 三原 713800)

摘 要: 将观测器(如雷达)在球坐标系的测量值转换到三维直角坐标系后,其误差分布规律将发生变化。通过分析,证明了理论模型不能直接应用于卡尔曼滤波,得到了适用于卡尔曼滤波的直角坐标系的工作模型,并对转换后的误差的理论模型和工程模型进行数值比较,两者的数字特征非常接近。

关键词: 误差分布规律;工程模型;理论模型;卡尔曼滤波
分类号: O242;TN21 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2000)01-0079-04

在目标跟踪中应用卡尔曼滤波,目标的状态方程可在球坐标系也可在直角坐标系中描述,而观测器的测量方程多在球坐标系描述。直角坐标系给出状态方程而球坐标系给出测量方程时滤波会出现非线性问题,通常采用推广的卡尔曼滤波。在直角坐标系描述测量方程时,存在测量值从球坐标系到直角坐标系的非线性转换问题。转换测量值之后,对应于球坐标系中的测量误差属于零均值高斯白噪声分布,直角坐标系中转换测量值的误差将不再是零均值高斯分布,不再满足线性卡尔曼滤波条件,无法直接进行卡尔曼滤波。本文经过分析,理论模型给出的误差分布由于不是高斯型,不满足卡尔曼滤波条件,无法直接用卡尔曼滤波实现最优滤波;此外,在工程条件下,还给出了转换到直角坐标系的测量值的误差模型,即工程模型,证明了该模型属高斯型分布,能够满足卡尔曼滤波的条件,可直接用此模型进行卡尔曼滤波。

1 理论模型

在球坐标系中,设观测器(雷达)位于坐标原点,目标的坐标为(r、θ、β),观测器对目标的测量值为(r_m、θ_m、β_m),观测器的测量误差为(Δr、$\Delta\theta$、$\Delta\beta$)。其中,r、θ、β 为目标的斜距、方位和俯仰坐标值,r_m、θ_m、β_m 为观测器对目标的测量球坐标值。

$$\begin{aligned} r_m &= r + \Delta r \\ \theta_m &= \theta + \Delta\theta \\ \beta_m &= \beta + \Delta\beta \end{aligned} \tag{1}$$

并且 Δr、$\Delta\theta$、$\Delta\beta$ 为零均值高斯白噪声分布,它们的方差分别为 σ_r^2、σ_θ^2、σ_β^2。将球坐标值转换到直角坐标系中,对应的目标直角坐标为(X,Y,Z),测量坐标值为(X_m,Y_m,Z_m),误差值为($\Delta X,\Delta Y,\Delta Z$)。利用坐标转换公式得

$$\begin{aligned} X_m &= r_m\cos\beta\cos\theta_m \\ Y_m &= r_m\cos\beta\sin\theta_m \\ Z_m &= r_m\sin\beta_m \end{aligned} \tag{2}$$

其误差表示式为

$$\Delta X = X_m - X = (r+\Delta r)\cos(\beta+\Delta\beta)\cos(\theta+\Delta\theta) - r\cos\beta\cos\theta$$
$$\Delta Y = Y_m - Y = (r+\Delta r)\cos(\beta+\Delta\beta)\sin(\theta+\Delta\theta) - r\cos\beta\sin\theta$$

收稿日期:1999-12-17
作者简介:魏麦成(1962-),男,讲师.

$$\Delta Z = Z_m - Z = (r + \Delta r)\sin(\beta + \Delta\beta) - r\sin\beta \tag{3}$$

将(3) 式展开，

$$\Delta X = r\cos(\beta + \Delta\beta)\cos(\theta + \Delta\theta) + \Delta r\cos((\beta + \Delta\beta)\cos(\theta + \Delta\theta) - r\cos\beta\cos\theta$$
$$\Delta Y = r\cos(\beta + \Delta\beta)\sin(\theta + \Delta\theta) + \Delta r\cos((\beta + \Delta\beta)\sin(\theta + \Delta\theta) - r\cos\beta\cos\theta$$
$$\Delta Z = r\sin(\beta + \Delta\beta) + \Delta r\sin((\beta + \Delta\beta) - r\sin\beta \tag{4}$$

从(4)式可以看出，ΔX、ΔY、ΔZ 由三部分组成，第一项由于存在非线性的正弦变换，其分布将不再是高斯型，第二项由于存在 Δr 与正弦变换的乘积，为高斯型，第三项为常数。三相之和为非高斯型，即球直转换后直角坐标分量的误差项 ΔX、ΔY、ΔZ 将不再是高斯型的。ΔX、ΔY、ΔZ 的联合分布亦不为高斯型。(4)式没有经过任何线性化处理，所求结果是严格的，故称之为理论模型。

根据文献[1]，可得到 ΔX、ΔY、ΔZ 的数学期望(均值)和方差：

$$E(\Delta X) = r_m\cos\beta_m\cos\theta_m(e^{-\sigma_\theta^2-\sigma_\beta^2}\text{-}e^{\frac{\sigma_\theta^2}{2}-\frac{\sigma_\beta^2}{2}})$$
$$E(\Delta Y) = r_m\cos\beta_m\sin\theta_m(e^{-\sigma_\theta^2-\sigma_\beta^2}\text{-}e^{\frac{\sigma_\theta^2}{2}-\frac{\sigma_\beta^2}{2}})$$
$$E(\Delta Z) = r_m\sin\beta_m(e^{-\sigma_\beta^2}\text{-}e^{-\frac{\sigma_\beta^2}{2}}) \tag{5}$$

$$R_{XX} = \frac{1}{4}(r_m^2 + 2\sigma_r^2)(\cos2\beta_m\cos2\theta_m e^{-4\sigma_\theta^2-4\sigma_\beta^2} + \cos2\beta_m e^{-\sigma^2\beta} + \cos2\theta_m e^{-4\sigma^2\theta} + 1)$$
$$- \frac{1}{4}(r_m^2 + \sigma_r^2)(\cos2\beta_m\cos2\theta_m e^{-3\sigma_\theta^2-3\sigma_\beta^2} + \cos2\beta_m e^{-\sigma_\theta^2-3\sigma_\beta^2} + \cos2\theta_m e^{-3\sigma_\theta^2-\sigma_\beta^2} - e^{-\sigma_\theta^2-\sigma_\beta^2})$$
$$R_{YY} = -\frac{1}{4}(r_m^2 + 2\sigma_r^2)(\cos2\beta_m\cos2\theta_m e^{-4\sigma_\theta^2-4\sigma_\beta^2} - \cos2\beta_m e^{-4\sigma^2\beta} + \cos2\theta_m e^{-4\sigma^2\theta} - 1)$$
$$+ \frac{1}{4}(r_m^2 + \sigma_r^2)(\cos2\beta_m\cos2\theta_m e^{-3\sigma_\theta^2-3\sigma_\beta^2} + \cos2\beta_m e^{-\sigma_\beta^2-3\sigma_\beta^2} + \cos2\theta_m e^{-3\sigma_\theta^2-\sigma_\beta^2} - e^{-\sigma_\theta^2-\sigma_\beta^2})$$
$$R_{ZZ} = \frac{1}{2}(r_m^2 + \sigma_r^2)(\cos2\beta_m e^{-3\sigma_\beta^2} - e^{-\sigma_\beta^2}) - \frac{1}{2}(r_m^2 + 2\sigma_r^2)(\cos2\beta_m e^{-4\sigma_\beta^2} - 1)$$
$$R_{XY} = \frac{1}{2}(r_m^2 + \sigma_r^2)(\sin^2\beta_m e^{-3\sigma_\theta^2-3\sigma_\beta^2} - e^{-3\sigma_\theta^2-\sigma_\beta^2}) - \frac{1}{2}(r_m^2 + 2\sigma_r^2)(\sin^2\beta_m e^{-4\sigma_\theta^2-4\sigma_\beta^2} + e^{-4\sigma_\theta^2})$$
$$R_{XZ} = \cos\theta\cos\beta\sin\beta(-r_m^2 - \sigma_r^2 + (r_m^2 + 2\sigma_r^2)e^{-\sigma_\beta^2})e^{-\sigma_\theta^2-3\sigma_\beta^2}$$
$$R_{YZ} = \sin\theta\cos\beta\sin\beta(-r_m^2 - \sigma_r^2 + (r_m^2 + 2\sigma_r^2)e^{-\sigma_\beta^2})e^{-\sigma_\theta^2-3\sigma_\beta^2} \tag{6}$$

2 工程模型

球坐标系中的目标点转换到直角坐标系后，直角坐标中的误差量 Δx、Δy、Δz 是点(x,y,z)和点(x_m,y_m,z_m)之差产生的。假设 Δx、Δy、Δz 相对于 x、y、z 或 x_m、y_m、z_m 是小量。为方便以 x 为研究对象。

$$X_m = r_m\cos\beta_m\cos\theta_m$$

对上式求微分

$$\Delta X = \frac{\partial x}{\partial r_m}\Delta r + \frac{\partial x}{\partial\theta_m}\Delta\theta + \frac{\partial x}{\partial\beta_m}\Delta\beta$$
$$= \cos\beta_m\cos\theta_m\Delta r - r_m\cos\beta_m\sin\theta_m\Delta\theta - r_m\sin\beta_m\cos\theta_m\Delta\beta \tag{7}$$

同理可得

$$Y_m = r_m\cos\beta_m\sin\theta_m$$
$$\Delta Y = \cos\beta_m\cos\theta_m\Delta r + r_m\cos\beta_m\cos\theta_m\Delta\theta - r_m\sin\beta_m\sin\theta_m\Delta\beta \tag{8}$$
$$Z_m = r_m\sin\beta_m$$
$$\Delta Z = \sin\beta_m\Delta r + r_m\cos\beta_m\Delta\beta \tag{9}$$

显然，Δx、Δy、Δz 是 Δr、$\Delta\theta$、$\Delta\beta$ 的线性函数。由于 Δr、$\Delta\theta$、$\Delta\beta$ 满足零均值高斯白噪声分布，所以 Δx、Δy、Δz 满足零均值高斯分布，其联合分布亦是高斯型。容易看出该模型由微分运算时的线性近似得出的，因而称之为工程模型。可以求出 Δx、Δy、Δz 的均值和方差：

$$E[\Delta X] = E[\Delta Y] = E[\Delta Z] = 0 \tag{10}$$
$$R_{XX} = \cos^2\beta_m\cos^2\theta_m\sigma_r^2 + r_m^2\cos^2\beta_m\sin^2\theta_m\sigma_\theta^2 + r_m^2\sin^2\beta_m\cos^2\theta_m\sigma_\beta^2 \tag{11}$$

$$R_{YY} = \cos^2\beta_m\cos^2\theta_m\sigma_r^2 + r_m^2\cos^2\beta_m\cos^2\theta_m\sigma_\theta^2 + r_m^2\sin^2\beta_m\sin^2\theta_m\sigma_\beta^2 \tag{12}$$

$$R_{ZZ} = \sin^2\beta_m\sigma_r^2 + r_m^2\cos^2\beta_m \tag{13}$$

$$R_{XY} = \cos^2\beta_m\cos^2\theta_m\sigma_r^2 - \frac{1}{2}r_m^2\cos^2\beta_m\sin2\theta_m\sigma_\theta^2 + \frac{1}{2}r_m^2\sin^2\beta_m\sin2\theta_m\sigma_\beta^2 \tag{14}$$

$$R_{XZ} = \frac{1}{2}\sin2\beta_m\cos\theta_m\sigma_r^2 - \frac{1}{2}r_m^2\sin2\beta_m\cos\theta_m\sigma_\beta^2 \tag{15}$$

$$R_{YZ} = \frac{1}{2}\sin2\beta_m\cos\theta_m\sigma_r^2 - \frac{1}{2}r_m^2\sin2\beta_m\sin\theta_m\sigma_\beta^2 \tag{16}$$

3　两种模型对卡尔曼滤波的限制

设状态 X 的状态方程和量测方程为

$$X_{k+1} = \Phi kXk + \Gamma kq_k$$

$$Yk = HkXk + v_k$$

其中 Φk 为 n×n 维状态转移矩阵，q_k 为模型噪声向量，Xk 表示 k 时刻状态向量，为 n 维，Γk 表示干扰矩阵，为 n×p 维。Hk 为 m×n 维量测矩阵，v_k 为 m 维量测噪声。引入有关定理(见文献[2]第 34 页)：

量测序列 Y1，Y2，…Yk 对状态 Xi 的均方意义下的最有估计 $\hat{x}_{i/k}$ 为条件期望

$$\hat{x}_{i/k} = E[Xi\,|\,Y1, Y2, \cdots Yk] \tag{17}$$

对线性系统，当 Xi 与 Y1，Y2，…Yk 为联合正态分布时，这个条件期望是 1，Y1，Y2，…Yk 的线性组合。

一般地，Y1，Y2，…Yk 对 Xi 的均方意义下的最优估计(条件期望)不一定是 1，Y1，Y2，…Yk 的线性组合，而应为 Y1，Y2，…Yk 的某一非线性函数，只有当定理条件满足时，用(17)条件期望表示的均方意义下的最优估计才是线性估计。按照无偏性和最小方差的要求，不难推导出卡尔曼递推式滤波方程。

据上述定理，可以看出，理论模型不满足联合正态分布的条件，不能直接应用卡尔曼滤波实现线性无偏最小方差估计，而工程模型能够满足联合正态分布的条件，可以直接应用卡尔曼滤波实现线性无偏最小方差估计。

4　两种模型的数值分析

在两种模型的误差分布已经给出的条件下，据式(5)(6)及(10)～(16)分别计算出它们的数值。

表 1　两种模型的均值比较(给出雷达的误差和空间目标不同位置的斜距、方位和俯仰)

雷达			理论模型			工程模型		
σ_r(km)	σ_θ(°)	σ_β(°)	E(Δx)	E(Δy)	E(Δz)	E(Δx)	E(Δy)	E(Δz)
1	1	1						
200	0	10	−0.0589	0	−0.0053	0	0	0
100	30	20	−0.0244	−0.0141	−0.00264	0	0	0
50	45	30	−0.00919	−0.00919	−0.00381	0	0	0
30	75	40	−0.00178	−0.00666	−0.00294	0	0	0
10	90	50	0	−0.00193	−0.00120	0	0	0

表 2　两种模型的方差比较(给出雷达的误差和空间目标不同位置的斜距、方位和俯仰)

雷达			理论模型			工程模型		
σ_r(km)	σ_θ(°)	σ_β(°)	$(R_{xx})^{1/2}$	$(R_{yy})^{1/2}$	$(R_{zz})^{1/2}$	$(R_{xx})^{1/2}$	$(R_{yy})^{1/2}$	$(R_{zz})^{1/2}$
1	1	1						
200	0	10	3.956	2.468	2.692	1.156	3.576	3.442
100	30	20	1.983	1.320	1.564	1.266	1.664	1.675
50	45	30	1.020	0.869	0.890	0.869	0.869	0.906
30	75	40	0.461	0.827	0.534	0.444	0.395	0.758
10	90	50	0.108	0.654	0.214	0.477	0.112	0.134

通过计算可以看出，两种模型的数字特征差别不大，近似相等。

5 结论

经过分析，两种模型具有不同的特性。理论模型虽然精确，但转换后的量测值误差不再是高斯型，不满足卡尔曼滤波的条件，不能直接应用卡尔曼滤波，而工程模型能够满足卡尔曼滤波的条件，可以直接应用卡尔曼滤波，因此工程模型为实际工程提供了应用条件。经过两种模型的均值和方差的具体计算，发现它们的数字特征很接近，且工程模型较理论模型计算简便，从而使工程模型在使用中具有较大的实用性。

参 考 文 献

[1] 杨春玲. 基于转换坐标卡尔曼滤波算法的雷达目标跟踪[J]. 现代雷达，1998(5).
[2] 贾沛璋，朱征桃. 最优估计及其应用[M]. 北京：科学出版社，1984.
[3] 吴祈耀. 随机过程. 北京工业学院. 北京：国防工业出版社，1984.

Analysis of Error Distribution Formed by Measurements in Ball-Coordinates System and Influence on Kalman Filter

WEI Mai-cheng
(Dept. of Missile Engineering of the Missile Institute, AFEU., Sanyuan 713800, China)

Abstract: After converting the measurements of detector, such as radar, in ball-coordinate system to the measurements in triangular rectangular-coordinates system, the error distribution ruler will be changed. By analysis the theoretical model is showed not to be suited for Kalman filtering directly, the engineering model is obtained to be suited for Kalman filtering and then the theoretical model is numerically compared with the engineering model on its numerical characteristics. They are in close proximity.

Key words: Error distribution ruler; Engineering model; Theoretical model; Kalman filter